

⑧ 経済主体の意思決定

No. 1
2020.02.24
Date 2019.02.18

山田陽介先生「経済学」を勉強

1. 制約条件のもと $\text{subject to: } s.t.$

目的関数を最大化 $\text{maximization } \text{max}$

max	目的関数
s.t.	制約条件

(1) 家計による消費・労働供給の決定

(2) 家計による消費・貯蓄の決定

(3) 企業による労働需要の決定

(4) 企業による設備投資の決定

2. 関数とは何か

2変数 x と y の間において、 x の1つの値に y が対応する (定義域)

y の値が1つ決まるとき (値域)

変数 y は変数 x の関数 (Function) F に従うといい、

$$\underline{F: x \rightarrow y, \quad y = F(x) \text{ と書く}}$$

3. 微分の操作とは何か

経済学では、「限界値」という言葉がよく用いられる。

この「限界値」という言葉は、「微分」 (differentiation) という。

微分とは、 x の変化分 (Δx) を限りなくゼロに近づけていくとき、

それに対応する y の変化分 (Δy) の割合を求める操作である。

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \begin{array}{l} \Delta y \text{ がどれだけ変化したか} \\ \rightarrow \Delta x \text{ を限りなくゼロに近づけていくとき} \end{array}$$

この導関数 $F'(x)$ は、

$$\underline{F'(x)}, \underline{y'}, \underline{\frac{dy}{dx}} \text{ あるいは } \underline{\frac{d}{dx} F(x)} \text{ を書く}$$

「単位を限界値に / 単位増やしたときの生産量の増加分」

生産関数 $y = F(x)$ とし

導関数 $\frac{dy}{dx}$ 又は $\frac{d}{dx} F(x)$ を示すことになる。

導関数 $F'(x)$ は、関数 $y = F(x)$ の各点における接線の傾きを、
変数 x の関数としてみなしたものである。

導関数が、関数の各点における接線の傾きを示すことから、

導関数の符号によって、その関数を分類することができる。

導関数がいかなる定義域においても正の値をとる関数のことを「増加関数」、
負の値をとる関数を「減少関数」と呼ぶ。

4. 微分の公式

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

関数の積 $y = F(x)G(x)$

$$\text{の導関数 } \frac{dy}{dx} = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$$

$$= \left(\frac{d}{dx} F(x) \right) G(x) + F(x) \left(\frac{d}{dx} G(x) \right)$$

関数の商 $y = \frac{F(x)}{G(x)}$

$$\text{の導関数 } \frac{dy}{dx} = \frac{F'(x)G(x) - F(x)G'(x)}{(G(x))^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{d}{dx} F(x) \right) G(x) - F(x) \left(\frac{d}{dx} G(x) \right)}{(G(x))^2}$$

関数の積・商を含む一般の合成関数 $y = F(G(x))$

$$\text{の導関数 } \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \frac{dy}{dz}$$

$$= \left(\frac{d}{dx} G(x) \right) \left(\frac{dy}{dz} F(z) \right) = G'(x) F'(x)$$

5 全微分と偏微分 (3教科以上の内の1教科)

偏微分とは、変数 x, y のうち、一方の変数を不変と考えるうえで、他方の変数を微小に変化したときに、変数 z がどれだけ変化するかを測る操作である。

全微分とは、変数 x, y の、それぞれ独立に微小に変化させた場合を組み合わせ、その変化に対応する変数 z の変化を測る操作である。

6 最大化の条件

$$y = F(x) = -x^2 + 6x$$

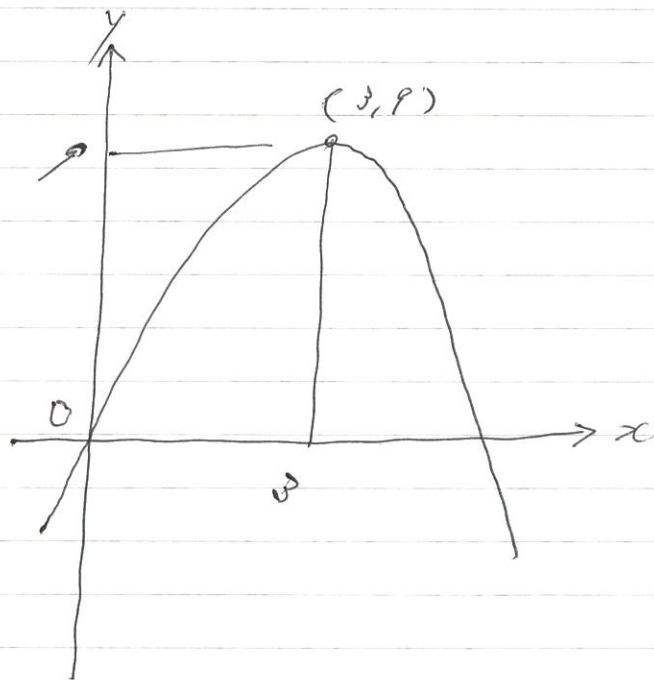
関数 $y = F(x)$ を最大化する
変数は

$$y = -(x-3)^2 + 9$$

により $x = 3$ である。

$x = 3$ のとき $y = F(x)$ は最大化し、

$x = 3$ である。



制約条件とは、最大化を行う経済主体を取り巻く、物理的・経済的
的制約を表し、

目的関数とは、経済主体の選択を最大化の手続きとする変数の
関数として最大化される指標を表したものである。

全微分とは？

すべての変数が同時に変化する場合には 限界的に成り立つ式 である。

その他の変数は一定と考え、ある変数のみを変化した場合に

限界的に値がどう変化するかをみる 「偏微分」 とは、区別される。

$z = f(x, y)$ のとき、

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} = \text{偏微分}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy : \text{全微分}$$

合成関数の微分

$y = f(g(x))$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = f' \times g'$$

7. 最大化の問題 / (家計の消費、労働供給の決定)

家計の目的関数は、消費と余暇の満足である。

U 効用
(目的関数)

subject to
制約条件

$$\begin{aligned} \max \quad & U = U(C, L) \quad C = \text{消費} \quad L = \text{余暇} \\ \text{s.t.} \quad & L = 24 - N \\ & WN = PC \\ & L = 24 - \frac{P}{W}C \end{aligned}$$

(制約条件)

N 労働供給
W 賃金 P 物価水準
C 消費

ここで、消費 C と余暇 L が家計の選択する変数である。

家計は時間的制約式 $L = 24 - N$ 1日24hを余暇 L と労働供給 N に分ける。

最大化問題を解くと、

制約式 $L = 24 - \frac{P}{W}C$ を目的関数 U に代入して、

目的関数 U を C に関する微分法導関数を0とする

合成関数の導関数の公式をあてはめると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial C} - \frac{P}{W} \frac{\partial U}{\partial L} &= 0 & \frac{\partial U}{\partial C} &= \frac{\partial U}{\partial L} \cdot \frac{P}{W} \\ \frac{\partial U}{\partial L} &= \frac{W}{P} & & \\ \underbrace{\frac{\partial U}{\partial C}}_{\text{限界効用}} &= \underbrace{\frac{W}{P}}_{\text{相対価格}} & & \text{合成する。} \end{aligned}$$

左辺は、家計が余暇 L を限界効用に1単位減少させるとき、失われる限界効用を補うために必要な消費 C の増加分を表す。これを、余暇の消費に対する限界代替率 (MRS) と呼ぶ。

一方の右辺は、市場において余暇一単位と交換するに
 なる消費の量を表す。余暇の消費に対する「相対価格」に相当する

よって、制約条件のもとで効用関数を最大化する消費 C^* 、余暇 L^* 、
 労働供給 $N^* = 24 - L^* = \frac{P}{W} C^*$ は、余暇の消費に対する
 限界代替率と相対価格が等しくなるように決定される。

このとき、限界代替率は、定数として所与となる効用関数に対して
 与えられるため、消費 C^* 、余暇 L^* 、労働供給 N^* はすべて
 市場において決定される相対価格 $\frac{W}{P}$ を要因として決定されること
 となる。

この関数を表したものを、

$$C^* = C \left(\frac{W}{P} \right)^{\oplus}$$

$$L^* = L \left(\frac{W}{P} \right)^{\ominus}$$

$$N^* = N^S \left(\frac{W}{P} \right)^{\oplus}$$

- C 消費
- L 余暇
- U 効用
- N 労働供給
- W 賃金
- $\frac{W}{P}$ 相対価格
- P 物価水準

⑧ 金融危機と国際機関

金融経済

1. 1929年の大恐慌

金融システムの安定性という国際公共財の安定維持

(1) IMFの設立

(2) 世界銀行の設立

2. IMFの金融危険への対応策への懸念

3. マイクロファイナンス、シニヒリー-2000

ワシントンコンセンサスと呼ばれる市場メカニズムへの賛否

4. 金融危機

資産価格の暴落、金融倒産等の金融市場の機能不全

1929 The Great Depression

1980 米ソ連間の対立 Relat Crisis

1997 East Asian Crises

5. グローバル化の失敗するとは、人間や人間の作り出す制度が
世界の統合による社会的心理的・制度的変化に十分適応できず

原因 → グローバリゼーションの終焉、ハイパーグローバル

6. 為替とは、

(1) 取引を行うと本国と他国、国内外を問わず、

直接現金を交換することなく、資金を決済すること

内国為替、外国為替、振替によって決済

↑
20国通貨交換

7. 為替レートの設定

経済学は何故 国を支配するのか

木下崇哉著 2009.5.3 旺文書社

1. 失われた10年 (1991 ~ 2002)

バブル崩壊から10年を越した経済不況

2. 経済政策のあり方

財政再建の 財政支出の

3. バブル崩壊

資産価値の大幅下落

4. デフレキス

消費者の消費低迷

企業の投資低迷

→ 著しい景気停滞

5. 借入大国 (世界一)

デフレキスを埋めるための財政支出, 日債発行

6. 2009年のリーマンショックと政策

(1) 財政再建

(2) 財政支出

スエーデン経済と 双対向題経済

(利益の最大化) (借入の最小化)

恐慌経済

恐慌経済

(1) 平成大不況 1990 - 2001

(2) 2005 ~ グローバル経済

(3) 2007 リーマンショック

(4) 吉野の享保の改革は、元禄・享保の前後の経済危機対策

幕府の増徴と上米への増徴、農民への増徴

長期不況と増徴による農市民の窮乏

徳川宗春の「温知政要」

吉野の緊縮政策の批判と苛政の重税、教化政策

恐慌経済における財政出動の正しさ

(5) 1933年 大恐慌に就いては、

ニューディール政策による 大型公共工事、軍需の拡大により 経済刺激

(6) 1933年 政権を握った フランクリン・ルーズベルトは、ハル・ペーリを経済大臣に起用し、

インフラの建設、大型公共工事の推進により失業者を大幅に減少させ

軍需の拡大の財政出動を行った。

2. 借金財政の限界

— 莫大なる債務超過の非劇から —

組織	収支	債務	資産	備考	改革
白人	△	>		生活破綻	再生
企業	△	>		倒産	再生
各藩	△	>		藩庫500万両の大借入で倒産	
幕府	△	>		金匱の志士と生んだ、幕末の大不況 英雄（生利、清田）達心 米経済（武士）と商品経済	

<改革>

上杉鷹山 藩政16年計画

藩政露 洞所綜合化

徳川吉宗 行政整理 侯府の財政再建

ギリシア

緊縮財政が引き起こすもの

2015.6 IMF向け債務の不履行（世界初の出来事）

日本

日本の財政はギリシアよりも不健全

緊縮財政は、口経済の悪化と財政再建の悪化をもたすもの

似かよ 幕末の財政危機は、此の財政危機と似てたもの

明治財政出動する迄の経緯は可なり

ギリシア危機 (ギリシア危機の教訓 島倉純喜) を読む

(1) 2009.10 政権交代

新政権の閣内、紛争誤解が生じた。

旧政権の下でのGDP比 4%の財政赤字に

実は、10%近くもあつたことが発覚した。

(2) EU基準から、財政赤字はGDP比 3%以内へ抑製
することを求められていた。

(3) その結果、ギリシア国債の暴落し、一時利回り

200%を超えた。ギリシア政府は新たな資金調達に
困難をきたした。

(4) 2012年に1,000億ユーロ(15兆円)を超える債務之際の
行方、一旦危機的状況は収束した。

(5) と同時に、財政再建のための政府支出を削減し、緊縮財政を進め、
経済の不振が続き、失業率は25%を超えた。

(6) 2015.1の選挙では、

① 緊縮財政を進める政府・与党に反対

② 反緊縮財政を掲げる急進左派連合の連立政権を樹立した

(7) 2015.6 IMFに対する債務の一部が期限に返済できなかった

10. 日本の財政はどうか

(1) キリシタと日本の比較

	日本	キリシタ
① プライマリー・バランス	$\Delta 6.7\%$	+ 0.2
② 経債務/GDP 比	246.4	177.2
③ 経常収支 ④	黒字	赤字 ④

(2) プライマリー・バランス (経常収支から金融収支を控除)
 プリマリー・バランス = 金融収支

基礎的財政収支 (P/L)

(3) キリシタは、資金調達が、恒常的に
海外から行われており、

自己返済がない限り、自国の金融政策は「ユーロ圏」

(4) 日本では経常黒字を記録し、④

例えば、国債も自己返済建て(国債)が发行されている

(5) マスター成長の ①、② を抑えて、③ を要因させる

(6) マスター成長の原因は、

① 緊縮財政は、乗数効果にマイナスに働く。

② 財政支出の成長にプラスに働くためには、乗数効果の増加が必要

③ " GDPに与える影響を与えるのは、自己返済建ての資金調達が重要

④ ①~③の前提に、日本は成長力を高めなければならない。率の増大となる

11. GDP伸び率 = 財政支出伸び率 とともに、

(1) アムノニッスオニの矢「機動的な財政政策」とは、
あくまでも 増税の範囲での 財政支出拡大 — 「均衡財政主義」の
产物として、 経済成長や その結果としての 税収増による
財政バランスをとるという 「積極財政」ではない。

(2) 全世界において

巨額の財政支出（赤字）を繰り返す。

水準の獲得に 結構なコストは かかり、 慎重にならざるを得ない

(3) 政府においては、 (2)の懸念は 正しいのか、

(4) 1929 の大恐慌 に対して

(失敗例)

フーラー政権は、財政支出の削減や増税を行なった

その結果、アメリカの GDPは 1929から1933年の間で 0.4%も減少

(5) 日本は 1997年に降参省財政路線にシフトした。

(失敗例)

しかし、当時の政府純債務/GDP比は OECD 諸国を下回っていた

今更だ 正確とされている。

見抜く経済学

経済

2020.02.24
2020.01.04

2020.02.04

人脈は太くてもいかに

のり、資源とインフラ設備は、高を積み出す装置であり、

実は収穫物上りも主である

(インフラ)

口から出るというにはインフラを整備せねば

2. 台湾のインフラを整備した日本人技師八田與一

今の日本に必要な仕事

- (1) 海外向けのものを作る
- (2) 国内向け
- (3) ものを海外へ輸出する
- (4) 国内市場でビジネスをする
- (5) 海外のものを入力する

3. 利益を生み出す以外 (インフラ)

4. リーマンショックを予測しなかった。

2008年9月 リーマンショック

歴史的最大規模暴落事件

2007年サブプライムローン

米国で1.5%の金利で起立して

低金利で金融商品

低収入者に低金利の貸付とローンの借入れの増加

(米国で低金利で借入れの増加)

5. 当初、世界は

サブプライム問題を米国内の限定した問題と見ていた

しかし、サブプライムを組む会社は世界中で金融商品化、
欧米の金融機関に広く販売されていた。

6. 経済ファクターは数ヶ月遅れ

リーマンショック時に適確な情報を流したと3月には

遅れはなかったといわれている

1. 新聞に発表された情報は一考也、

8 Xデミアから取り上げられた段階

正反対の受け取り方

・ 副分野で勝負しつと 注釈

・ 副分野の分野で厚み出のカーと反荷

情報の活用

新しい情報

新聞は毎日取らなければならない

これに載っているのは 最新の情報と
思ってもらえる

情報

—— しかし、現実には、厚み出た情報ばかり

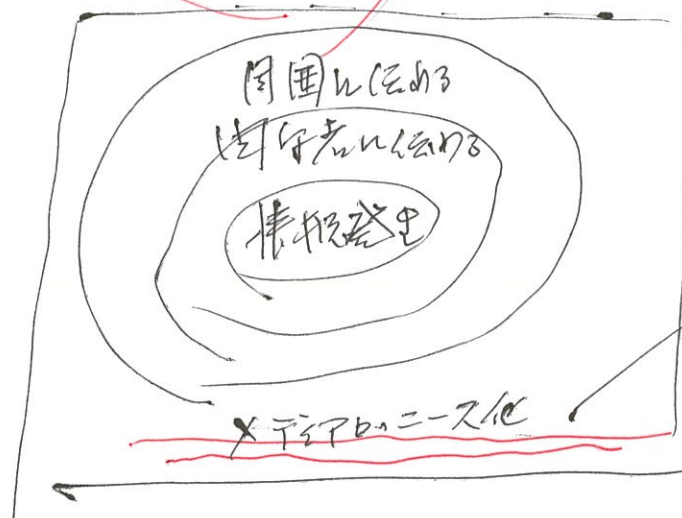
—— 失敗したための 有益な情報

9. 本場に伝わる情報とは

隠れている

人々から渡り伝わる (伝わる) 伝わる

将軍とは
その時
その時
その時



一番最後の段階!!

11. 経済レポート専門ニュース

各業界の日報, レポート

12 経済の基本構造の把握 ↑ 仕組

(1) なぜ そのような問題が起ったのか

(2) その問題が生まれた 仕組み はどうなっているか

サマワフイルム - 2

Bに売った紙新聞購者同様に先売にシフト



紙新聞購者同様に先売にシフト



先売にシフトになる

債権を買った金融機関等は、先売という名目で
手詰を繰上、サマワフイルム - 2 債権を先売品商品の
一部に組み出す、129 が見えなくなる

— 129 の先売品商品と見做される —

12. 経済はすべて 仕組み で成り立っている

モノ 商品というものは、長年長年売れ残りの山にあって、
世の中を前段階に 売れる仕組み が作られている。

13. ルールとシステム (経済を動かすもの)

(1) ルール

様々な決めごと (信号) (車、人)

(2) システム

ルールの集合体

(システムとして動く)

↓ 巨大化

(3) 世界経済

(経済を動かす)

ルールを知り、システムの構造を知る

↓

ルールとシステムを上手に利用する

↓

(ルールを作る)

アフリカ・中東・北朝鮮半島

—— これらの変化の根本は システム

アフリカ

トランプの保護を以て — 愚策

アフリカの先行を更に悪化させる

アフリカのファクトリーの競争の活用を望むに依り

それら未中のテクノロジー競争に勝つわけはない、

ファクトリーは世界移転の足で使われている

北朝鮮

これから北朝鮮の時代

変化

北朝鮮は韓国のプロパガンダ

南北統一による未来

北の核は民族の核

経済、資源、人口

変化を与える

変化には 前提条件 の存在する

変化の背景を与える

清子氏やアベノミクスが 前提条件 となり

わ
日本をより強い状態にしている。

変化の中に5.0と示す動き

Small μ (1)

成果はコトの結果に於て

コト

幸運

別の如く

しるし

母の過程

↓

母

母の過程に於て

コト

母の過程に於て

母の過程に於て

最大化 No. 4 企業の投資決定

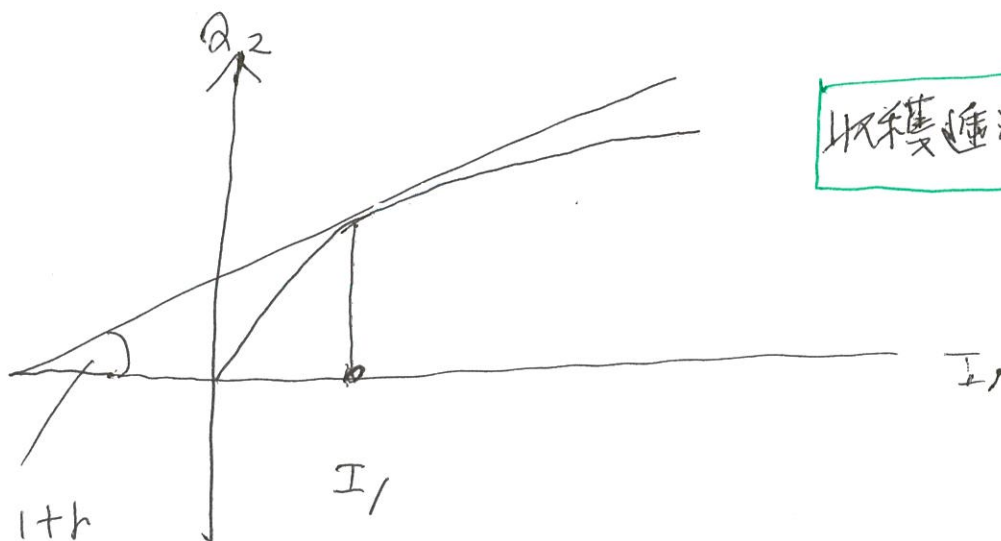
現在の設備投資を I_1

現在の利率

将来の生産量 Q_2

異時点間の生産関数

$$Q_2 = f(I_1)$$



収穫逕減の性質

現在における財価格を P_1 将来における財価格を P_2

名目利率を i とすると

(π) 先から、投資費用を引いた利潤関数

$$\pi = P_2 Q_2 - (1+i) P_1 I_1$$

(7) 仮想通貨の急激な金融世界

28

中央銀行の管理が及ばず「通貨マネー」の範囲が拡大
——自国通貨の暴落、仮想通貨への移行

現在日本銀行発行総額 100兆円) 日本マネー 500兆円
通貨供給総額 400兆円

世界中の仮想通貨
仮想通貨取引報告は信用創造の仕組みが与えられている

民間マネー (銀行マネー) 1,000兆円

(8) 米フェイスブック ... リブラ

「高利貸」という仮想通貨サービスへの利用者の不満

(9) 中国 ... 数字の人民元



積分の定石

(変化する量を集めて形にする)

2019.08.26
2019.08.05
2019.06.24
2019.06.03
2019.04.15
2019.02.12
2018.09.18
2018.07.16
2018.05.14
2018.03.19
2018.01.15

会計と経営のブラッシュアップ
平成 29 年 9 月 25 日
山内公認会計士事務所

次の図書等を参考にさせていただきました。(微分と積分なるほどゼミナール S58.1 岡部恒治著 日本実業出版社刊)
(微積分のはなし 1985.3 大村平著 日科技連刊) (Excel で学ぶ微分積分 H24.8 山本将史著オーム社)
(イラスト図解微分・積分 2009.6 深川和久著 日東書院刊) (微積分を知らずに経営を語る PHP 選書)
(Excel でやさしく学ぶ微分積分 室 淳子著 2006 東京図書)

I 身近な積分

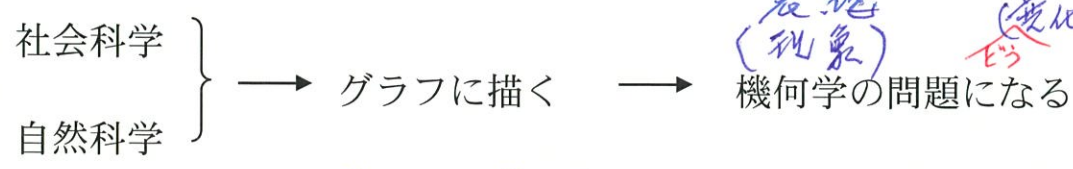
1. 積分の歴史

内山力著
2019.10.07
2019.10.14
2019.10.28
2019.11.11
2019.12.09
2020.02.24
2020.02.17
2019.12.22

(1) 古代エジプトで積分の基礎が築かれた。(どうやって全体の面積を把握するか)

↓
ギリシャのアルキメデスが更に発展

↓
17C のニュートンとライプニッツが微分・積分を発明



現象を表現し $y=f(x)$ 変化する量 $y=f(x)$ 結果 $\int_a^b f(x)dx$
(現象) (変化) (結果)

積分 → 結果 となったか、小さな変化をどのように形とするか
小さなものから大きな形を得る、小さな変化を積み重ねるとどうなったかとその結果
曲線で囲まれた土地の面積を直線化して調べる
小さな変化は大きくなるとどんな形になったか
変化する様子、変化する量をどうやって集めるか

変化する量は
ととらえているのか?

→ インテグラルが付くと積分することを表す (")

S(SUM)のとき、表すは Σ (それ以外も同様)

小さいものを集める!!
すべて

次のような技術は、すべて微分・積分がなければ発展しなかった。
コンピュータ、通信、光学機械、テレビ、ラジオ、CD、車、鉄道、飛行機、
建築、経済学、物理学、化学、工学、農学...

放物線、導関数、頂点 — 接点、接線の式

放物線

$$y = f(x) = -x^2 + 3x + 4$$

現在 (将来の傾向)

導関数

放物線の傾きの化を先ず

$$y' = f'(x) = -2x + 3$$

将来 (現在の状況)

グラフの頂点

傾きがゼロになる点の傾き

$$f'(x) = -2x + 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} = 1.5$$

導関数の傾きがゼロ

$$f(1.5) = -1.5^2 + 3 \times 1.5 + 4 \rightarrow y = 6.25$$

(1.5, 6.25)

放物線上の点

(2, 6) における

$x = 2$ における

$$y = f(2) = -4 + 6 + 4 = 6$$

元の関数における A(2, 6) 点

接線の傾き

A(2, 6) における接線の傾きは導関数により

(瞬間の傾き)

$$y' = f'(2) = -4 + 3 = -1$$

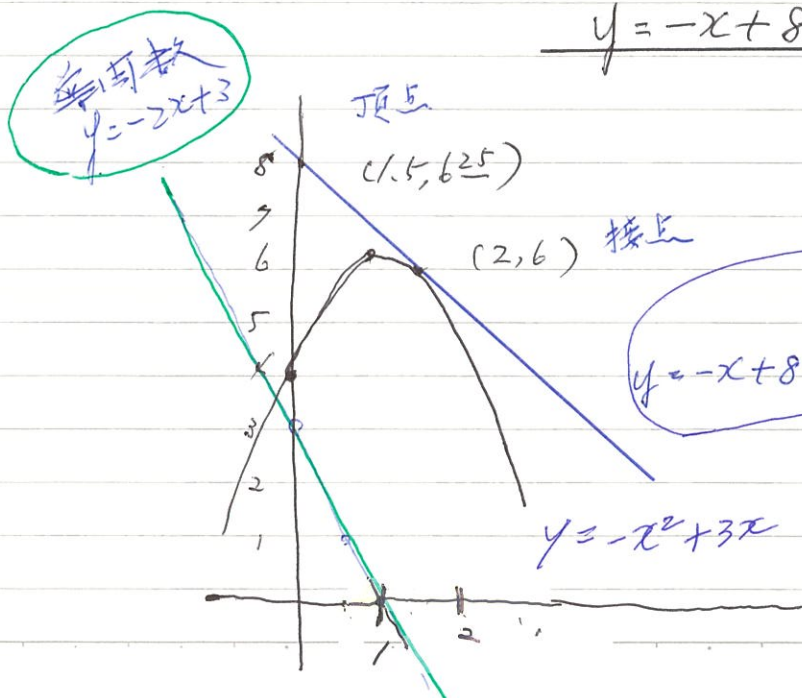
将来

接線の式

点 (a, b) を通る傾き m の場合の式 (接線の式)

$$y - b = m(x - a) \quad y - 6 = -1(x - 2)$$

$$y = -x + 8$$



導関数の傾き -2

接線の傾き -1

?

何故 1/2 のか

導関数の傾きは ?

導関数の定義式

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$g = 2^x \quad x = a^y \quad y = \log_a x \quad (\log x)$$

$$y' = \frac{1}{x} \log a^e = \frac{1}{x} \log e = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}
 (\log_a x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) \div \log_a x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{(x+h)}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x}{h} \cdot \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) \\
 &= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) \frac{x}{h} \\
 &\because \frac{h}{x} = k \text{ とおくと} \quad \lim_{h \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = e \\
 &= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \log_a (1+k)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{x} \log_a e \\
 &= \frac{1}{x} \log_a e \quad \text{は、底を } e \text{ とすると、} \\
 &= \frac{1}{x} \log_e e = \frac{1}{x} \text{ とある}
 \end{aligned}$$

結局

$$(\log_a x)'$$

$$= \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x}$$

$$\rightarrow \log_e x$$

又は y'

$$y = x^x \text{ の微分 } \left(\begin{array}{l} \text{対数微分法} \\ 2020.2.22 \end{array} \right)$$

対数をとることで (log を使う) 微分する

$$\log y = x \log x \quad (\text{底は } e)$$

x に微分する $\left(\frac{d}{dx} \right)$

(左側)

$$\frac{d}{dx} \log y$$

log y を微分
するため $\frac{dy}{dx}$ を入れる

$$\frac{d}{dy} \log y \cdot \frac{dy}{dx}$$

(右側)

$$= \frac{d}{dx} x \log x$$

積の微分公式

$$(x)' \log x + x (\log x)'$$

$$= \log x + \frac{x \cdot 1}{x}$$

$$\frac{1}{y} \times x' = \frac{x'}{y}$$

$$= \log x + 1$$

①

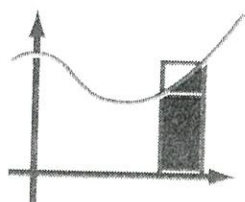
② 3行の

② の証明

$$x' = x^x (\log x + 1)$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x^x} \rightarrow y = x^x \text{ 両辺に } y \text{ を乗じる}$$

対数法則、積の微分公式、商の微分公式 を使う



微分でも対数が活躍

～対数微分法～

ここまでも、面倒な計算が続いてきたが、これから、さらに複雑な関数を微分していく。大変であるが、ここが1つのピークなのでがんばろう。さて、複雑な関数を微分する方法には、合成関数の微分法と対数微分法の2つがある。

合成関数とは、2つの関数 $y=g(u)$ 、 $u=f(x)$ に対して、前者の式に後者の式を代入してできる関数 $y=g(f(x))$ のことをいう。合成関数 $g(f(x))$ の導関数は、 $\{g(f(x))\}'=g'(u)f'(x)$ である。つまり、合成関数 $y=g(f(x))$ の導関数は、 $g(u)$ を u で微分し、 $f(x)$ を x で微分して得られる2つの導関数 $g'(u)$ 、 $f'(x)$ の積である。

対数微分法は、関数 $y=f(x)$ の両辺を対数で表した、 $\log y = \log f(x)$ を微分する方法である。ただし、^{しんすう}真数(62ページ)が正であることを考慮する必要があるが、ここでは省略する。以下で、具体例を見ていこう。

n が0以上の整数のとき、 $y=x^n$ の導関数は $y'=nx^{n-1}$ であることを見てきた。しかし、実は、 n は0以上の整数に限らないことがわかる。それを、対数微分法で計算しよう。 p を実数として、関数 $y=x^p$ を微分しよう。両辺を対数で表すと、 $\log y = \log x^p$ であり、 p が前に出て、 $\log y = p \log x$ となる。この式の左辺は、 y の関数 $\log y$ と x の関数 $y=x^p$ の合成関数になるから、右図のように、 $(\log y)' = 1/y \cdot y'$ となる。右辺は、 $(p \log x)' = p(\log x)' = p/x$ である。したがって、 $y'/y = p/x$ となり、 $y' = p/x \cdot y$ である。 $y=x^p$ であるから、 $y' = p/x \cdot x^p = px^{p-1}$ となる。つまり、 $y=x^p$ を微分すると $y' = px^{p-1}$ である。

なぜ
②
↓

$$\log y' = \frac{d}{dy} \log y \cdot \frac{dy}{dx}$$

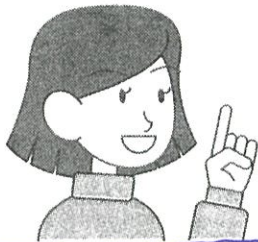
複雑な関数を微分する

合成関数の微分

合成関数 $g(f(x))$ の導関数

$y=g(u)$ 、 $u=f(x)$ の合成関数 $g(f(x))$ の導関数は

$$\{g(f(x))\}' = g'(u)f'(x)$$



2つの関数の導関数のかけ算になっているわ。これは複雑な関数を微分するときに使われるの

対数微分法

x の変化を考えずに y が変化する関数と考える
→ y の関数である

$y=x^p$ の微分 (p は実数)

対数で表す

$$\log y = \log x^p = p \log x$$

左辺

右辺

$\log y$ と $y=x^p$ の合成関数

y で微分

x で微分

$$(\log y)' = \frac{1}{y}$$

$$y'$$

かけ算

$$(\log y)' \cdot y' = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{y'}{y}$$

x で微分

$$(p \log x)' = p \cdot \frac{1}{x} = \frac{p}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{p}{x} \text{ より}$$

$$y' = \frac{p}{x} \cdot y$$

$$= \frac{p}{x} \cdot x^p$$

$$= p x^{p-1}$$

$$\rightarrow y' = p x^{p-1}$$

$$y = x^p$$

$y = x^p$ の微分

$$\log y = p \log x$$

$\log y$ と $y = x^p$ の合成関数 $(p \log x)' = p \cdot \frac{1}{x} = \frac{p}{x}$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\textcircled{?}$ 何故 $\log y' = \frac{d}{dy} \log y \cdot \frac{dy}{dx}$ の合成関数

$$(\log y)' = \frac{1}{y} \quad y'$$

$$(\log y)' \cdot y' = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{y'}{y}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{p}{x} \quad \text{?}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{p}{x} \quad y' = \frac{p}{x} y = \frac{p}{x} \cdot x^p = p x^{p-1}$$

$$\boxed{y' = p x^{p-1}}$$

複利の計算

複利の増加していく量 x

利率 a

時間の経過 t

$\frac{dx}{dt} \rightarrow$ 元利合計の増加率

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad \text{--- ①}$$

$ax \rightarrow$ 元利合計

①は x を t で微分した形なので、 x の増えを知りたい、この式を
 t で積分すればよい

但し、左辺は t で積分可、右辺は x は t の関数だから積分が
解けないので、 t で積分のし方がない

そこで ①を変形して、 $\frac{dx}{x} = a dt$ とする

これを積分に

$$\int \frac{dx}{x} = \int a dt \quad \text{--- ②}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x} dx$$

②を積分に

$$\log_e x + C_1 = at + C_2, \quad C_2 - C_1 = C_0 \text{ とする}$$

$$\log_e x = at + C_0$$

これは、 $e^{at+C_0} = x \quad x = e^{at} \cdot e^{C_0}$

いま $t=0$ のとき $x=A$ とすると $e^{C_0} = x = A \Rightarrow$

$$x = A e^{at} \quad \text{と表す --- ③}$$

A は $x=0$ のときの x の値

1分あたり $\frac{1}{60}$ の割合で増殖している細菌は、
10時間経過すると何倍になるか

$$x = A e^{0.01 \times 60} = A e^6 = 403A$$

10時間経過後 403倍になる

減衰量の計算

段階状の減衰量

「ある期間後に α の減衰が生じる

$$y = 1 - \alpha \quad \text{--- ①}$$

減衰後の残量

連続状の減衰量 減衰率 a

「ある期間を k 等分し、それぞれに

$\frac{a}{k}$ の率で減衰していくとすると

ある期間後の残量は、

$$\left(1 - \frac{a}{k}\right)^k$$

α と a の関係は、
 a は減衰率

$$1 - \alpha = \left(1 - \frac{a}{k}\right)^k$$

また、 k をとると大きくした極限は、

$$\lim \left(1 - \frac{a}{k}\right)^k = e^{-a}$$

従って、 α と a の関係は、

$$y = 1 - \alpha = e^{-a}$$

この関係を、ある期間後の減衰量の式 ①
に代入すると、

$$y = A(e^{-a})^x$$

放射線物質、
水素のように連続的に減衰する物質では、
 x 期間後の量を表す関数の形となる。

$$= A e^{-ax}$$

y : x 期間後の状態

A : スタート時の量

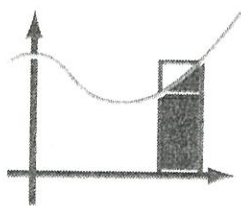
e : 指数関数 the exponential function

a : 減衰率

x : 期間

t とすると

$$= A e^{-at}$$



微分しても 変わらない関数

～指数関数の微分～

前項で、複雑な関数の微分に有効な方法である合成関数の微分法と対数微分法を見てきた。この2つの方法を使って、いよいよ指数関数の導関数を求めることにしよう。

指数関数 $y = a^x$ の両辺を対数で表すと $\log y = \log a^x$ だから、 x が $\log a$ の前に出て、 $\log y = x \log a$ である。前項で考えたように、①左辺の x の関数 $\log y$ と②右辺の x の関数 $x \log a$ に分けて計算する。

①左辺の x の関数 $\log y$ は、 y の関数 $\log y$ と x の関数 $y = a^x$ の合成関数である。したがって、左辺を x で微分すると、導関数 $(\log y)'$ は、 y で微分した $(\log y)' = \frac{1}{y}$ と y を x で微分した y' の積になる。

つまり、 $(\log y)' = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{y'}{y}$ である。

②右辺を x で微分すると、 $(x \log a)' = (x)' \cdot \log a = 1 \cdot \log a = \log a$ である。

したがって、 $(\log y)' = (x \log a)'$ であるから、①、②より、 $\frac{y'}{y} = \log a$ である。両辺に y をかけて、 $y' = y \log a = a^x \log a$ となる。つまり、 $(a^x)' = a^x \log a$ である。

とくに、 $a = e$ であるとき、 $\log e = 1$ であるから、 $(e^x)' = e^x$ となる。「指数関数 $y = e^x$ は微分しても変わらない関数!!」、これが、非常に重要である。この性質のために、 $y = e^x$ はいろいろな場面に登場する関数である。

微分に動じない関数

指数関数の導関数

指数関数 $y=a^x$ の微分

両辺を対数で表す(対数微分法)

$$\log y = \log a^x = x \log a$$

①左辺

$\log y$ と $y=a^x$ の合成関数

y で微分 x で微分

$$(\log y)' \cdot y' = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{y'}{y}$$

②右辺

x で微分すると

$$(x \log a)' = (x)' \cdot \log a = 1 \cdot \log a = \log a$$

$$\frac{y'}{y} = \log a \text{ より } y' = y \log a = a^x \log a \rightarrow y' = a^x \log a$$

$$y = a^x$$

指数関数の微分

<底が e の場合>

$$(e^x)' = e^x$$

同じ

<底が e でない場合>

$$(a^x)' = a^x \log a$$

元の関数 $\times$ 自然対数



微分しても変わらないとは
驚きだね

振数、対数

12-1の月々返済額

利率 r

2020.01.13

2020.02.04

2020.02.24

① a 円を n 月預けたときの元利合計 $X = a(1+r)^n$ 円 ①

$= a \times e^{r \times n}$

② 利率 r で月々 x 円づつ返済したときの

n 月後の元利合計の返済額 X

$$x + x(1+r) + x(1+r)^2 + \dots + x(1+r)^{n-1}$$

$$X = \frac{x\{(1+r)^n - 1\}}{(1+r) - 1} = \frac{x\{(1+r)^n - 1\}}{r}$$

② $\frac{x\{(1+r)^n - 1\}}{r}$

PP5. ①=②より

① $a(1+r)^n =$ ② $\frac{x\{(1+r)^n - 1\}}{r}$

$a = 1,000,000$ $r = 0.02$ $n = 30$ とすると
月利

$$1,000,000(1+0.02)^{30} = \frac{x\{(1+0.02)^{30} - 1\}}{0.02}$$

$$1,811,362 = \frac{x(1.02^{30} - 1)}{0.02}$$

$$x = 1,811,362 \times 0.02 / (1.02^{30} - 1)$$

$$= 44,149 \text{ 円 と } 45.$$

$y = a^x$ — ① の導関数を求める

両辺の自然対数をとると

$\log_e y = x \log_e a$ となり、両辺を微分する

(1) ここで左辺 $\log_e y = u$ とおき、

$$\log y' = \frac{d}{dx} \log y = \frac{d}{dy} \log y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{y'}{y} \text{ とする}$$

$$\text{左辺は } (\log_e y)' = \underline{\underline{\frac{y'}{y}}} \text{ とする}$$

$$(2) \text{ 右辺は、 } (x \log_e a)' = \underline{\underline{\log_e a}}_{x \rightarrow 1}$$

$$(3) (1), (2) \text{ より } \frac{y'}{y} = \log_e a \quad y' = y \log_e a \text{ — ② とする}$$

(4) ① $y = a^x$ かつ ② は

$$y' = a^x \log_e a$$

$$(5) y = e^x \text{ かつ } y' = y \log_e e = e^x \log_e e = e^x \times 1 = e^x$$

$$\textcircled{1} y = a^x \rightarrow y' = a^x \log_e a$$

$$\textcircled{2} y = e^x \rightarrow y' = e^x$$

$$\textcircled{3} y = \log_a x \rightarrow y' = \frac{1}{x \log_e a}$$

$$\textcircled{4} y = \log_e x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

指数関数 $y = a^x$ の微分公式の証明

任意の $a > 0$ に対し. $y = a^x$ の導関数は, $y' = a^x \log a$ である

(あるいは)

$$\text{または } y' = \log a \cdot x \cdot a^x$$

一般の指数関数 a^x を、既知の指数関数 e^x に帰着させることが大切

(1) 定義に従って求める

$$\begin{aligned} a^x \text{ の導関数は } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x (a^h - 1)}{h} \\ &= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \end{aligned}$$

ここで, $a^h = e^{\log a^h}$ とおき, 上式は

$$a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\log a^h} - 1}{\log a^h} \cdot \frac{\log a^h}{h} = a^x \cdot 1 \cdot \log e$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{よって } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \text{ (※)} \\ \log \frac{\log a^h}{h} = \frac{h \log a}{h} = \log a \end{array} \right) \quad \frac{e^{\log a^h} - 1}{\log a^h} = 1$$

(2) 対数微分法により求める

$$y = a^x \text{ の対数を取ると } \log y = x \log a$$

$$\text{両辺を微分} : \frac{y'}{y} = \log a \rightarrow y' = y \log a$$

$$\text{よって, } y' = y \log a = a^x \log a = \log a \times a^x$$

2. 減衰関数

(1) 目盛り... 減衰関数

ある期間ごとに、 α の率で減衰がみられると
 x 期間後の残量は

単利の場合

$$y = A(1 - \alpha x)$$

増殖の場合

$$A(1 + \alpha x)$$

複利の場合

$$y = A(1 - \alpha)^x$$

$$A(1 + \alpha)^x$$

ボートのオールを漕ぐのをやめると、

$$20 = 105(1 - x)^{41}$$

ボートの速度は、そのときのボートの速度に比例して

$$20 = 105(1 - 0.046)^{41}$$

(複利的に) 減少する。

(19.69)

不一致(?)

ある物体に含まれている放射性物質の量も

その物体から発生したものの半減期で減少する

連続的に複利で減少する現象

$$y = Ae^{-at}$$

ある期間を k 等分して、それぞれ α/k の率で減衰してゆけば、
 ある期間後には $1/k$ の元金のみ、

$$20 = 105e^{-0.04 \times 41}$$

$$\left(1 - \frac{\alpha}{k}\right)^k \text{ になっている。}$$

$$20 = 105 \times e^{(-0.040 \times 41)}$$

(20.367)

1ステップで減少した量に等しい等分するから α と a の1対1に

$$1 - \alpha = \left(1 - \frac{a}{k}\right)^k \text{ の1対1関係がある。}$$

(2) 増殖同様と同様に

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{k}\right)^k = e^{-a} \quad \text{となり、}$$

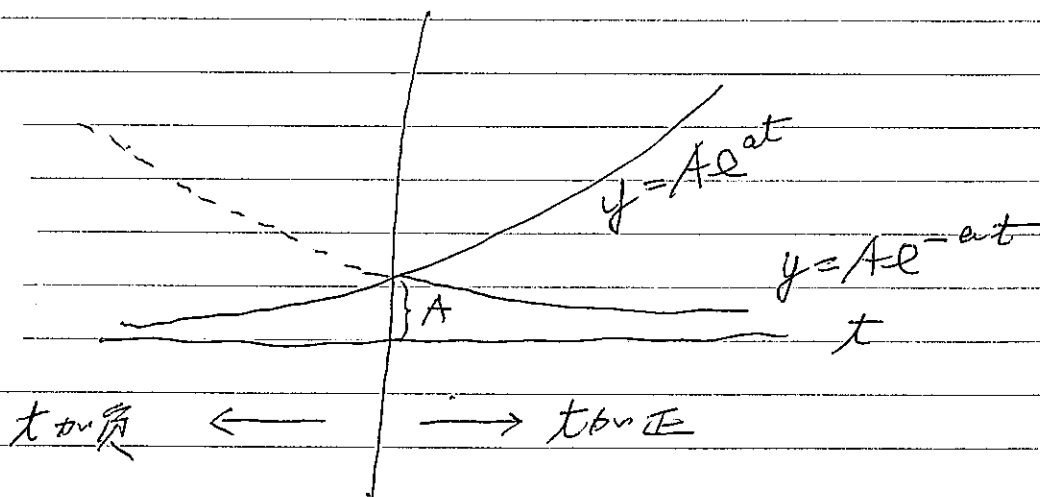
$$1 - \alpha = e^{-a} \quad \text{から得られ}$$

これを前頁の

$$y = A(1 - \alpha)^x \quad \text{に代入すると}$$

$$y = A(e^{-a})^x = Ae^{-ax} \quad \text{となる、}$$

連続的に複利が増減する場合の式から得られる。



(4) ポリニウム 210 の増減

この増減、10日後に 0.95g となっていた

ポリニウムの半減期は、

$$y = e^{-at}$$

$$\begin{array}{lcl} y & \cdots & g \\ t & \cdots & \text{日} \end{array}$$

$$a \cdots \text{減少率}$$

$$0.95 = e^{-a \times 10}$$

e^{-x} が 0.95 になるとき x は $\log 0.95$ となる

$$a \times 10 = 0.05$$

$$a = 0.005$$

$$0.5 = e^{-0.005x}$$

e^{-x} が 0.5 になるとき x は $\log 0.5$ となる

$$0.005x = 0.69$$

$$x = 138 \text{ (日)}$$

(5) 連続的に複利の減衰する現象は、

$$y = A e^{-at}$$

より、 A は $t=0$ のときの y の値

より A が半分になる時刻は、

$$\frac{1}{2}A = A e^{-at}$$

$$\therefore 0.5 = e^{-at}$$

より、この時

$$at = 0.69$$

より半減期を T_h とする

$$aT_h = 0.69$$

$$T_h = 0.69 \frac{1}{a} \text{ 年である。}$$

a は 年利 226 では、0.00048

年利 210 では 0.005 であるから、

対象の価格に比例する定数である

(6) 平均寿命

平均寿命を T_m とすると

$$aT_m = 1$$

$$\therefore T_m = \frac{1}{a}$$

$$\text{半減期 } T_h = \frac{0.69}{a} = 0.69 T_m$$

$$\text{平均寿命 } T_m = \frac{1}{a} = 1.45 T_h$$

半減期は平均寿命の 0.69 倍、平均寿命は半減期の 1.45 倍
 すい始めから 10 分後に、水槽内の小魚は半分に減ってしまった。
 小魚の平均寿命は $10 \text{ 分} \times 1.45 = 14.5 \text{ 分}$ である。

隠れ場のない広野で生き延び、巨大な台風が降るまでの、
 1 分間に 10% の人たちが倒れた。

50% の人たちが倒れるのは何分後か。平均寿命はいくらか。

$$0.9 = e^{-a \times 1 \text{ 分}}$$

$$a \times 1 \text{ 分} = 0.1 \quad (\text{表 1 の指数関数表より})$$

$$\text{すいすい } \text{半減期 } T_h = \frac{0.69}{a} = 6.9 \text{ 分}$$

$$\text{平均寿命 } T_m = \frac{1}{a} = 10 \text{ 分}$$

炭素 14 の半減期

- (1) 炭素 14 は 放射性炭素ともいわれ、半減期は 5,730 年 である。
- (2) 大気中に含まれる炭素 14 の割合は一定であり、生きている生物も炭素 14 の割合は 大気中の割合と同じである。
- (3) 生物が死ぬと炭素 14 の供給がなくなり、崩壊ばかりが続くので、死んだ植物の炭素 14 の割合を調べると死んでからの年数に推定できる。

(問 1) ある木棺の炭素 14 の割合を調べたら、75% に減っていた。

このとき、この木棺の年代は _____ ト = 残存割合

炭素 14 が 1 年で ① 倍 に減少するとして、

この木棺が x 年前のものだとすると、

$$T^x = 0.75 \quad \text{また} \quad T^{5730} = 0.5$$

$$\log T = \frac{\log 0.5}{5730}$$

$$x \log T = \log 0.75 \quad \text{--- ①} \quad 5730 \log T = \log 0.5 \quad \text{--- ②}$$

$$\text{① ② より} \quad x = \frac{\log 0.75}{\log T} = \frac{\log 0.75}{\frac{\log 0.5}{5730}} = \frac{\log 0.75 \times 5730}{\log 0.5}$$

$$= \frac{5730 \times \log \frac{3}{4}}{\log \frac{1}{2}} = \frac{5730 (\log 3 - 2 \log 2)}{-\log 2} = 5730 \times 0.4150 = 2378 \text{ 年}$$

元利合計の計算

段階状の元利合計

「ある期間」後に α の利息がつく

$$1 + \alpha$$

連続状の元利合計

「ある期間」を k 等分し、それぞれに

β/k の利率で利息をつけつづける複利計算

をしてゆくとすると、「ある期間」後の元利合計は、

$$\left(1 + \frac{\beta}{k}\right)^k$$

α と β の関係は
とける

$$1 + \alpha = \left(1 + \frac{\beta}{k}\right)^k$$

そして、 k をとて大きくした極限は、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\beta}{k}\right)^k = e^\beta$

従って、 α と β の関係は、

$$1 + \alpha = e^\beta$$

$$\therefore \alpha = e^\beta - 1$$

この関係を x 期間後の元利合計の式、 $y = A(1 + \alpha)^x$ に代入すると

細菌のために連続的に増殖する増殖式は、

$$y = A(1 + e^\beta - 1)^x$$

$$= A(e^\beta)^x$$

これから、連続的に増殖していく利率 β について、

$$= A e^{\beta x}$$

x 期間後の量を表わす関数の形をとる。

y : x 期間後の元利合計、総数

A : 元金、最初の元金、スタート時の量

e : 指数関数

β : 利率、増殖率

x : 期間

$$= A e^{\beta x}$$