第２回　コーポレートガバナンス

2019.11.10
2019.09.09

(株主は何を求めているか)

2019 年 5 月 6 日
会計と経営のブラッシュアップ
2017 年 3 月 20 日
山内公認会計士事務所

宮古.RH

株主の期待値を最高にする、そのためには社会的責任の認識が必要である。

本レジュメは、企業会計基準及び次の各書を参考にさせていただいて作成した。(トップの暴走はなぜ止められないのか　奥村宏著　H24.5 東洋経済発行)
(生涯投資家　村上世彰著　2017.7 文藝春秋刊)(会社は頭から腐る　冨山和彦著　H19.8 ダイヤモンド社発行)
(明日を支配するもの　P.F.ドラッガー著、上田惇生訳　1999.3 ダイヤモンド社発行)

Ⅰ　マネジメントとガバナンス

こういうことを取締役(経営陣、執行部)

１．コーポレートガバナンスとは　(監査上の最重点項目)

企業は誰のためにあるのか。誰に責任を持つべきか。

ドラッカーは、その著、**現代の経営(1954 年著)**の中で、「企業はその**中央**において、**第一に統治の機関（成果）**を必要とし、**第二に監視機関（評価）**を必要とする。企業の仕事、成果、文化は、**トップマネジメント**を構成するそれら二つの機関の質に依存する。」という旨を述べている。

企業価値を高めるコーポレートガバナンス体制が必要である。日本の会社は**調和を重視する価値観**が支配的である。構成員には集団内の軋轢を避けようとし、内輪の規範が外部の社会規範に優先する傾向がある。このような組織は活性化が不足し、問題が生じる。企業価値を高めるには**マネジメント**(執行機能)を充実させるとともに、**評価・監視機能**の健全化即ち、組織の腐敗を防ぎ、強味を維持するために外部規律が重要になる。

国債務の膨張の進行

高齢化で膨張が続く**社会保障費**や**大震災の復興費**代によるものとは言え、情報化社会を迎え、GDP の 2 倍を超える巨額の借金、~~国債の売れ行きが鈍ることによる金利の上昇を考えれ~~ば、1960 年に成功した、低賃金プラス先進国の技術導入（模倣）による後進国方式経済成長~~では~~、責任感を持った国の運営とは言えない。

の過去の成果にとらわれた経済大国意識

政府の役割は、会社的に言えば、**マネジメント（執行）**と**説明責任（監視）**である。このような**責任感のない執行**を行ない、また**監視機能が働かない**ことは、**ガバナンスの無視であり**、組織にとって**最も危険**なことである。
（責任感）

それは長年にわたって巨額の損失が隠されてきた「オリンパス」、「大王製紙」、「AIJ 投資顧問」などの**最近の巨額不正の事例**を見ると明らかである。
東芝, それは、企業成績好調の後の表面成績維持の財務操作も上記に似たものである。

オーナー（株主・

2．コーポレートガバナンスの全体構成

つい最近まで、企業は、顧客、従業員、株主のバランスある利益のために経営すべきであるという考えが主流だった。その結果、実際には、誰にも責任を負わずに経営が行われた。
平均寿命の伸長が、年金基金と信託基金の発展をもたらし、現在、公開企業の主要株主となっている。

Performance

企業統治とは、企業を**効率的に**、且つ**適正に**経営することである。
そしてそれぞれの利害関係者に責任を持つことである。

コンプライアンス
⇑
コーポレートガバナンス
⇑
内部統制

コーポレートガバナンス
（トップマネジメントの二つの機能）

Performance

経営資源を有効に使用しているか　　株主は何を求めているか（適正な収益の獲

企業経営の執行機能
（トップマネジメント 1）

企業経営の監視機能
（トップマネジメント 2）

忠実義務、委任の原則

執行・統治の機関
代表取締役及び常務会
(取締役の義務と責任)

監視・評価の機関
取締役会、監査役(会)
(取締役の義務と責任)
(取締役会の役割と責任)

その企業の責任者は何か？
それに責任、意思はないか？

(リスク管理体制)

リスクを洗い出して、全体を想像する

(1) 業務の安全性
(2) 業務の適正性
(3) 取締役の義務と責任の適正性

推定

(内部統制構築義務)

(1) 会社法等における関連規定
(2) 取締役の義務と責任の適正性
(3) 不祥事の事例と原因

コーポレートガバナンスは、一方では、企業経営の活性化、発展と利益の最大化のための**企業活動機能**であり、他方では、企業経営の安全と継続を図るための**監視・評価機能**である。この両者によって、企業のトップマネジメントが構成されていると考えるべきである。

金融商品取引法で規定されているのは、財務的なものであるが、会社法では、コンプライアンスも含めた業務執行についての内部統制システムの開示が義務づけられている。

corporate governance

企業統治　（オーナー：株主、消費者、従業員…）

株主、消費者、社外取締役などが、企業の経営に対して、チェック機能を果すこと

企業活動の最大限効率化の確保と不祥事の未然防止

経営執行者、経営陣を監視すること

会社を最適に制御すること

内部統制はコーポレートガバナンスを実現するための手段

企業不祥事　―　会社は誰のものか

コーポレートガバナンスはコンプライアンスを実現するための手段

形式上では意味がない　―　リーマンショック

経営者による違法行為の防止

情報開示の徹底、社外取締役、社外監査役

独占的支配と反社会的行動の制御

リーマンショックの元

アメリカ大手金融機関の破綻は企業統治の失敗とされる

(1) 経営の適切な管理

(2) 迅速かつ正確な情報開示

(3) 法令遵守の経営の実現

(4) 経営者の違法行為に対する責任追求

経営陣による会社の利益の最大化のための努力、企業経営の健全性や透明性の確保、維持のための仕組や制度

2003、3 証取法の改正

会社の機関の内容

内部統制システムの整備の状況

リスク管理体制の整備の状況

役員報酬の内容、

監査報酬の内容

企業価値最大化

企業経営の透明性、健全性

内部統制の仕組の適合性

企業統治というのは、要するに企業活動における公平性、透明性、そして、説明責任の問題だ。 ―ウォルフェンソン世銀総裁

コンプライアンス

↑

コーポレート・ガバナンス

↑

内部統制

3．正しいガバナンスと問題点

継続的に企業を発展させるもの。

それは、マネジメント（執行機能）と説明責任（評価・監視機能）である。

これらの問題をすべて制度や仕組みの問題、即ちルールとして解決することは不可能に近い。また、そうすることは逆に多くのメリットを奪ってしまう可能性もある。即ち、ルールとともに、マネジメントの心構えが必要である。

（マネジメントの問題点）

監視機能（説明責任）を執行機能と同レベルの経営の中央（最高）機能と考える必要がある。

（取締役会の問題点）

取締役会は株式会社の業務に関する**意思を決定し**、取締役の**職務執行を監督**する機関、取締役の全員で構成されるとされているが、ここに不祥事の発生する原因、即ち執行者の批判性を欠いた単なる承認機能になる恐れがあるのではないか。

（株主の問題点）

個別の株主は、株主全体の利益を代表する立場になく、株主総会を通じて取締役の業務執行を**コントロール**することは難しい。また、株主にとっては、**積極的な監視**がある一方で、**株式の売却**という方法があり、監視の持続は難しい。

（取締役会、監査役の問題点）

経営陣に対する監督、モニタリングは、**取締役会**こそが中核的な役割を果たすべきである。そのためには、経営者との間に従属関係や強い利害関係のない、**マネジメント（執行）から独立**して監督、評価のできる取締役の存在が必要である。監査役、監査役会は業務執行の**「適法性」**の監査が主となり、経営の**「妥当性」**は取締役会が主となるべきである。

（従業員にとって）

（社会にとって）

4．ガバナンスの最も重要なテーマは何か

究極的には、**トップマネジメントの執行における受託責任であり、監視機能として、その地位の選抜と罷免**という権限にある。
監視機能は、直接的には取締役会であり、間接的には監査制度である。

トップマネジメントは、**企業価値を高める経営**を執行する機能である。
投資に値する事業に**投資**し、**経営努力**によって企業の**拡大**と**発展**を行ない、事業を**継続**する義務がある。監視機能と執行機能は相俟ってコーポレートガバナンスを構成する。

（監査基準とガバナンス）
平成 14 年に公表された**改訂監査基準**は、次の点をあげているが、これは企業リスクに対応し、企業価値を高める経営を目指すことと一致している。
①不正発見に対する姿勢の強化
②継続企業の前提
③リスク・アプローチの徹底
④新たな会計基準への対応
⑤監査報告書の充実、整備

（情報開示の基礎に受託責任）
平成 16 年の**財務情報のフレームワーク**において、財務会計の主目的は、投資家の意思決定に資する情報開示とされている。しかし、この情報開示は受託責任に基礎を置いたものでなければならない。企業経営者の受託責任こそコーポレートガバナンスの基礎となるものである。

（業務執行取締役の職務執行監督機能の問題点）
取締役会は取締役の職務執行を監督する機能を有しているが、その構成員に業務執行取締役がかかわっていることは、充分な監督機能を果たす上で問題である。例えば、トップマネジメントの選抜と罷免に関連する当事者は権利の行使は行うべきではない。監督機能というよりも、業務執行についての責任の認識がより必要ではないか、或いは一定の執行議案の承認権は別に決めるべきではないか。即ち、**取締役会の業務執行機能と決定機能と監視機能の分離を図る必要があるのではないか。**

監視と評価の独立性

受託と評価の責任感

1-6

CPAAOB Certified Public Accountants and Auditing Oversight Board

3. 検査結果の概要（5）

○
統計的(Sample)の考え方ー、

従来型の監査	過渡期	リスク・アプローチ型監査
・リスク・アプローチの不理解 ・BS項目に偏重した監査（残高確認含む） ・PL項目：カットオフ手続偏重 ・証拠力の評価なし ・会社資料：正確性及び網羅性の検証なし	・機械的に、収益認識のみに特別な検討を必要とするリスクを識別 ・取引の種類別、アサーション毎のリスク識別なし ・分析的実証手続：要件を満たしていない	・PL項目の検証：分析的実証手続も併用 ・サンプル抽出する母集団や抽出基準を論理的に検討

上記、リスク・アプローチ型監査の先に、監査の基準が求める形がある

Risk曲線の理解
売上、45°線（直線的な上昇）
物語を推定し、組立てる力
Riskは指数曲線的。
Riskの拡大は拡大の一途ー指数的ーー

CPAAOB Certified Public Accountants and Auditing Oversight Board

4. リスク・アプローチに係る不備（1）

(ア)不備事例の概要

- リスク・アプローチ：考える監査⇒何を考えるか理解できていないケースが散見される
- 何を考えるか？

①リスクの識別（被監査会社の状況に応じて、重要な虚偽表示リスクがどこに、どのようにあるか）

②監査手続（監査リスク、証拠力を考慮した上で、監査手続の実施時期、範囲、深度）

- リスク評価、監査計画、監査手続に首尾一貫性がない

1-7

4. リスク・アプローチに係る不備(2)

(イ)不備事例(リスクの識別)

- 収益認識に不正リスクを識別しているが、売上の取引種類又は監査要点に関連付けたリスク評価を実施していない
- 被監査会社は、継続して営業損失を計上し、財務制限条項に抵触する可能性が高まっているなど、不正リスクや資産の評価減のリスクが想起される複数の状況が存在しているにもかかわらず、会計上の見積りについて特別な検討を必要とするリスクを識別しないことについて、被監査会社の状況を踏まえて検討していない
- 被監査会社が会計方針を変更したことについて、事業内容又は被監査会社を取り巻く内外の経営環境の変化と整合しているか、経営者の偏向があるか検討していない

15

この会社の今の営業環境は何か

それについて 継続、変化、悪化はないか

CPAAOB Certified Public Accountants and Auditing Oversight Board

4. リスク・アプローチに係る不備(3)

(イ)不備事例(監査計画の立案)

- 監査チームは、期首に策定した監査計画において、前期の財務諸表数値を基に、実証手続を実施すべき重要な取引種類、勘定残高及び開示等を決定している。しかしながら、監査チームは、期中において被監査会社の企業環境や業績が悪化しているにもかかわらず、監査計画の見直しを行っていない
- 監査チームは、初年度監査の実施にあたり、前任監査人から得た情報や監査事務所内の受嘱手続等を通じて把握した監査リスクを監査計画の立案に反映させていない

16

4. リスク・アプローチに係る不備(4)

(ウ)リスク・アプローチに基づく監査計画に不備が生じる原因

原因	・業務執行社員のリスク・アプローチ理解不足や監査計画への関与不足
	・リスク感度が低い、経験が不足している ⇒職業的懐疑心の保持・発揮が不足
	・評価したリスクとそれに対応する監査手続が合致しておらず、監査証拠の適切性、十分性、証拠力を考慮して、監査計画を立案する姿勢に欠ける

Riskを把握
理解と考える

不正リスク … 収益認識、見積り項目、関連当事者取引

CPAAOB Certified Public Accountants and Auditing Oversight Board

5. 監査における不正リスク対応に係る不備(1)

(ア)不備事例の概要

職業的懐疑心の保持・発揮不足

・機械的に収益認識だけに不正リスクを識別している	・収益認識や会計上の見積り項目に不正リスクを識別しながら、対応手続が不十分	・関連当事者取引や通例でない取引を識別しながら、不正リスクの評価が適切に実施されていない

18

5．アカウンタビリティ（説明責任）

アカウンタビリティとは、株主から資産の管理運用を委託された経営者が果たすべき説明責任のことで一般的には企業の財政状態及び経営成績をまとめた決算書類の報告である。経営者のアカウンタビリティ（説明責任）を果たすためには**良好な内部統制を構築する必要（義務）**がある。
この説明責任（情報開示）の基礎には受託責任がある。

内部統制の目的は次の四つに集約される。
①経営目的や経営資源の活用・保護など業務の有効性・効率性
②公表された財務情報の正確性と作成の信頼性
③組織の維持のための関連法規の遵守と忠実性
④資産の保全と取得、使用、処分等の適切さ

企業というものは人為的に作られたものであり、自然に発生したものではない。従ってそれ自体に**厳格な説明責任**というものが必要である。企業で不祥事が繰り返されるのは企業の生まれた理由による。

（取締役会の監視機能の明確化）
(1) 取締役会の機能の明確化
(2) 業務執行機能との分離
(3) 一定の業務執行議案の承認権
(4) 業務執行決定機能と監視機能の区分明確化
(5) 業務執行取締役の参加権の明確化

会社というものは
人のお金を使う
資源
利益

受託責任の一般的な理解（民法、会社法）

他者からの財貨の受託責任　(取引先、顧客、従業員…)

善良なる管理・運用
（受託義務）
— 受託責任 —

受託事項の報告
（報告義務）
— 情報開示 —

受託者の企業組織の管理と受託者に対する監視の両立がなければ他者からの財貨の受託責任は果たせないのではないか。

コーポレートガバナンス

(9月のごあいさつ)

平成24年9月24日（月）

８月７日の立秋を聴いて50日近くになるのに、まだ夏のような気候です。これを残暑というのでしょうか。

経営者の責任感

コーポレートガバナンスとは、
(マネジメントの二つの機能)

企業経営の積極的な執行
(企業活動の活性化・利益の最大化)

企業経営の保全と監視機能 評価.
(企業リスクの適正な監視と評価)

コーポレートガバナンスとは企業や組織を効率的に経営することである。企業経営の基礎は、**経営陣の受託責任**である。それは適正な企業経営の為に、経営陣が認識すべき**最も基本的な条件**である。企業の規模の拡大と社会的な存在意義の高まりにつれて、経営陣の受託責任は重要性を増す。尚、受託責任とは東京経済大学の高山朋子教授が、「受託責任を基礎にした情報開示について」で述べておられる「**開示情報の基礎に受託責任**」の意味であり、証券募集業務や投資顧問の受託(者)責任ではない。**一般的に言えば、他人や組織のために仕事をする者の責任である。** 啓蒙
(人のお金や利益や資源を使って.

経営陣は、**企業経営の委託**を受けて、企業の**投資のポジション（財産）**と**その成果（採算）の向上**を図ることを職務としている。これは経営陣の基本的な義務であり、大企業であれ、中小企業であれその本質は変わらない。企業は経営上の成果をあげるために、**第一に統治の機関**を必要とし、その成果を維持継続する為に、**第二に評価・監視機関**を必要とする。この二つの機能により、**執行と監視の実**をあげ**企業価値を高める**ことができる。ところが、日本の企業、特に中小企業は**調和を重視**する価値観が支配的であり、**チームワークを欠いた**少人数の**スマートでない**独断での**マネジメント**を行う傾向がある。それが組織の**不祥事**につながる。
(会社の最近の業況(特に損益)の変化、成長、衰退をチェックすること

監視機能とは、マネジメントの執行に対する**説明責任**(アカウンタビリティ)であり、組織の監視機能の重視である。それは、取締役(理事)会、株主総会(評議員会)、監査役(監事)、会計監査人、重要な従業員などの意見と**チェック機能の尊重**である。マネジメントは組織のチェック機能からの疑問に対して、前向きで**誠実な対応**をする必要がある。そのチェックに対して、事実と理由の説明を行う必要があり、それらを無視したり、チェック機能を軽んじたり、故意に避けたり、理由の説明を欠いてはいけない。チェック機能に対するマネジメントの業務執行の正当性の説明が必要である。監視機能によるチェックはマネジメントの**業務に対する疑問**であり、無視や言い訳で済ませられるものではない。経営を委託している側(株主、従業員、政府、社会など)への受託者側からの説明と受止めなければならない。それを行わないことは、たとえ不祥事の有無にかかわらず、経営や組織の私物化であり、選任母体等の意向や利益を無視する**受託責任を欠いた行為**である。

経済

東京五輪後の日本経済

参考資料：(東京五輪後の日本経済 白井さゆり著 2017小学館刊)

(非伝統的金融政策の経済分析 竹田陽介・矢嶋康次著 2013日本経済新聞)

○学習日

2019.10.07
2019.10.15
2019.10.22
2019.10.28
2019.11.04
2019.11.11

落下が起きないか？

日銀債務

1、異次元緩和

2013.12 安倍政権
2014.○

(円 80〜100 ‖ 2013 ‖ 100〜110)
(株 8000〜10000 ‖ 10,000〜23,000)

1) 高騰する都心の不動産価格

①日本銀行の異次元緩和 (大量のマネー供給)

②東京五輪開催決定 (将来への期待)

1986〜1991のバブルの想い出 (全国的な不動産、日経 38,957円)

今回は局所的・東京中心

実需を伴わない不動産建設ブーム (需要が見込まれていないのに)

2006〜2007のミニバブル ヒリーマンショック

実需的な需要を伴っていない

今回 2017〜 の

③ 不動産向け貸出

空虚で危険な建設ブーム

相続対策

都心の一部
局所的現象
バブル時とは違い

個人のアパート等賃貸建設の増加

都心のオフィスビル建設

実需を伴わない住宅供給

① 実需

地銀のアパート建設融資の増加 対前年9%

不良債権化のおそれ

問題点

~~今後、アパートの居住者が大きく増えない見通しの中で~~

実需を伴わない住宅供給

節税商品としての賃貸住宅建設

将来の供給過剰

日本の世帯数の減少が始まったとき

単独世帯を中心に増加傾向の世帯数も2020年頃から減少へ

家賃保証の罠 (家賃相場と連動)

空き家の増加

④ タワーマンションは投機か

高い価格は、建設現場の人手不足と輸入建築資材の高騰

⑤ スウェーデンの住宅事情

大規模な金融緩和

住宅の不足　（移民や難民の大量流入）

実需があるから不動産価格が上昇

バブルとは実需を完全に無視した価格水準

② 日本の世帯数

人口減だが変化少

結局 1人世帯化

↓

買物 → 外食、レストラン

料理 → 購入、コンビニ

実需の基盤

(2) 日経平均 2万円はバブルか

2008〜2012の平均株価

8000〜10,000円

高いとは言え過去の 50％程度

米国など世界は、最高値を更新中

① 株価収益率　PER（株価収益率）

時価総額 ÷ 純利益

又は、株価 ÷ 1株当たり利益

PERで判断しなければならない

外国人主導の株価

② 株価は外国人主導で動いている

80年代は日本人主導

③ アベノミックス

・大胆な金融政策

・機動的な財政政策

・民間投資を喚起する成長戦略

③ 株高と円安 → 株高

比較グラフ

円ドルレート×200 ＝ 株価

✓ 外国人投資家は円安の予想

円売り → 円安

✓ 大胆な金融政策により、輸出産業

はじめ、株価も上ると予想

株購入 → 株高

④ 円安と株高

「大規模な金融緩和政策」によって、今後円安になり、日本の輸出産業の

株価が上るに違いないと考え

— 円を売り（円安）、日本株を買う（株高）

⑤ 持合株の解消と外国人株主の増加

長期的投資から短期的投資(3年)

将来の株価暴落の主因は外国人投資家

⑥ 円安

? ETF(株式の市場からの大量購入)は世界で初めての実験

円高 ― 輸入企業が儲かる

円安 ― 輸出企業が儲かる

日本銀行の ETF(指数連動型上場投資信託)の購入

数千億円 → 17兆円/2016

:2012

日本株は

世界第3位の株主

年金積立金管理運用独立行政法人(GPIF)

2014.3 21兆円 → 2017.6 36兆円

日本株の最大株主

⑦ コーポレートガバナンスの後退 (利益)

法令の遵守と効率的な経営

④
日本の株主(2020.11) 巨大な物言わない株主

日銀(ETF) 40兆円 (6~7%)

GPIF(年金管理法人) 36兆円 (6%)

日銀 ETF 15兆円 (10年→)

GPIF 36兆円 (25%)

毎年6兆円増える

⑧ 日銀がETFを売るとき

? 永久に買えるか いつどのように売るのか

クジラと称される日銀のETF購入力(毎年6兆円)

リスク資産(ETF、REIT [illegible]兆円の株式……

日本銀行のリスク資産

? 日本銀行は売る決断にならないか

⑤
リスク資産の大きさ

? 外国人投資家による売り崩し

2020 国債 460兆円 / ETF 40兆円 > 500兆円 総資産の83%

純資産 40兆円

1%で 50兆円

大企業のガバナンスの甘さ

2012.12 第二次安部内閣
白川総裁の退任 2013.1
(1) 過度な円高
(2) 金融緩和の不足
(3) リスクをとらない

3、日本経済の不都合な真実

(1) デフレからの脱却

1990年代〜

デフレとは、モノやサービスの価格が継続的に下がっていく経済状態

↓

最終に、従業員の賃金が下がる

企業の販売価格が上がらない

(2) デフレマインド

企業や家計のデフレマインド

統計上の物価指数
（ほとんど価格上昇なし）

OECD
世界に
日本だけ デフレ

＜家計が認識する物価変化率
（物価が上がっている）

⑥ 異次元緩和の効果

(1) 極端な円高の是正　1ドル 80円→1…
(2) 〃 株安 〃　10000円→20…
(3) 失業率の改善　3％を切る
(4) 金利水準の低下

効果へなかったこと
(1) 経済成長へつながなかった
1％〜1.5％ → 1.2％
(2) 賃金上昇の低下
(3) ~~物価上昇はなかった~~

人件費が上がらない

⑦ デフレは消費者国民の不安

(1) 日本経済は、金融緩和政策によって
たくさんの需要を作り出せる — 本当ではなくなってきている

日本だけ
デフレからなぜ
脱出できないのか

—日本型デフレ— の真の要因
消費者心理との乖離　$\boxed{\text{国民の不安}}$

高齢化の進展、働き手の減少
バブル後の長い失われた時代
膨大な政府債務
将来に対する不安

K

(4) 人手不足の中の低賃金

異次元緩和 ―― 株高と円安 → 国民の生活につながらない

「3本の矢」のセオリー

人手不足 ― 賃金上昇 ― モノやサービスの価格上昇（とはならない）

企業好調 ― 賃金上昇（とはならない）

考えられる影響（賃金が上がらない）

① 高齢者の退職後の雇用

② パート、女性の増加

③ 企業活動の抑制（活動の縮小）、成長制約

(5) リスクをとらない日本人

(6) 貧富の差が拡大する中で苦しむ庶民

5. 世界経済のゆくえ

(9) 中国経済の問題点 Ⓐ.Ⓑ.Ⓒ

Ⓐ

① 企業債務の問題 過剰債務

地方政府出資の投資会社の債務、民間企業の債務

GDP比で170%〜200%（2,500〜 兆円）

② 家計債務

住宅価格高騰、住宅ローン債務

約600兆円（政府債務600兆円）

③ 公的・民間の総債務（2,500〜3,000兆円）

④ シャドーバンキング

銀行もかかわっている

順天堂
に[illegible]
コーヒー

Ⓑ

⑤ 企業の過剰生産能力

リーマンショック後の景気刺激策

⑥ 鋼鉄産業の過剰生産能力

5年間で1億〜1.5億トン削減目標

＝日本の年間粗鋼生産量

↓

大量の失業者の発生

⑦ 資本流出の問題

2015年 約1兆ドル 国外流出

日本のGDPの $\frac{1}{5}$、100兆円

米紙バーでア

↓

現地化

⑧ 人民元売りの心配

高い成長
高い金利
→ 成長の減速
経済問題

世界からお金が集まる
人民元高

人民元安へ
人民元売り

⑨ 中国発のリーマンショックは起こるか

民間経済主導の経済ではなく
政府主導の経済
中国は、日本と同様、外国資本に依存していない

購買力平価（国内のモノやサービスの購買力）でみると
中国はアメリカを抜いて第一位

（中国企業は国有企業
民間主導ではない

④ 東京五輪後の金融危機（不動産価格）

金融危機のパターン

(イ) ノンバンク中心の金融危機

ノンバンクが過度にリスクをとった場合

(ロ) 各国の中央銀行が出口政策を突然実行に移した時期

2008年以後の大規模な金融緩和政策

中央銀行が市場から大量の資産の買入れ

これが資産価格の上昇をもたらし → バブル

(ハ) 不動産価格

今回の不動産価格上昇の要因は何であったのか。

異次元緩和 → 市場に大量のマネー供給、金利低減

東京五輪への期待

(ニ) 不良債権処理のために、不動産価格には、

さらに下落圧力がかかる。

(ホ) 歴史 ― 不動産価格の底（10年毎）

2002年 ― 2012年 ― 2022年 ―

⑥ 東京五輪後の為替（為替）

(イ) いったんは 円高方向か

(ロ) 為替変動要因

1、2国間のインフレ率の差

2、〃 経常収支の差

インフレ国の為替は下落しやすく
デフレ国 〃 上昇しやすい → 将来の円高

経常収支の赤字国は 下落しやすい
〃 黒字国 上昇 〃 → 将来の円高

⑦ 五輪後の円の大暴落

国の借金残高

対GDP比

2019	200％
2030	300％
2080	400％

→ 円の大暴落

（3）いよいよ始まる企業淘汰

① 現状の日本

供給力 ―――― 需要力

バランス
＝

技術の老朽化
生産能力の限界

衰えつつある需要

企業淘汰

淘汰

高い生産性を持つ企業だけが残る

地域、国などが寄って生産性を上げなければ
なければ　淘汰　される

沖縄企業の低生産性も、淘汰で解決できる
のでは……

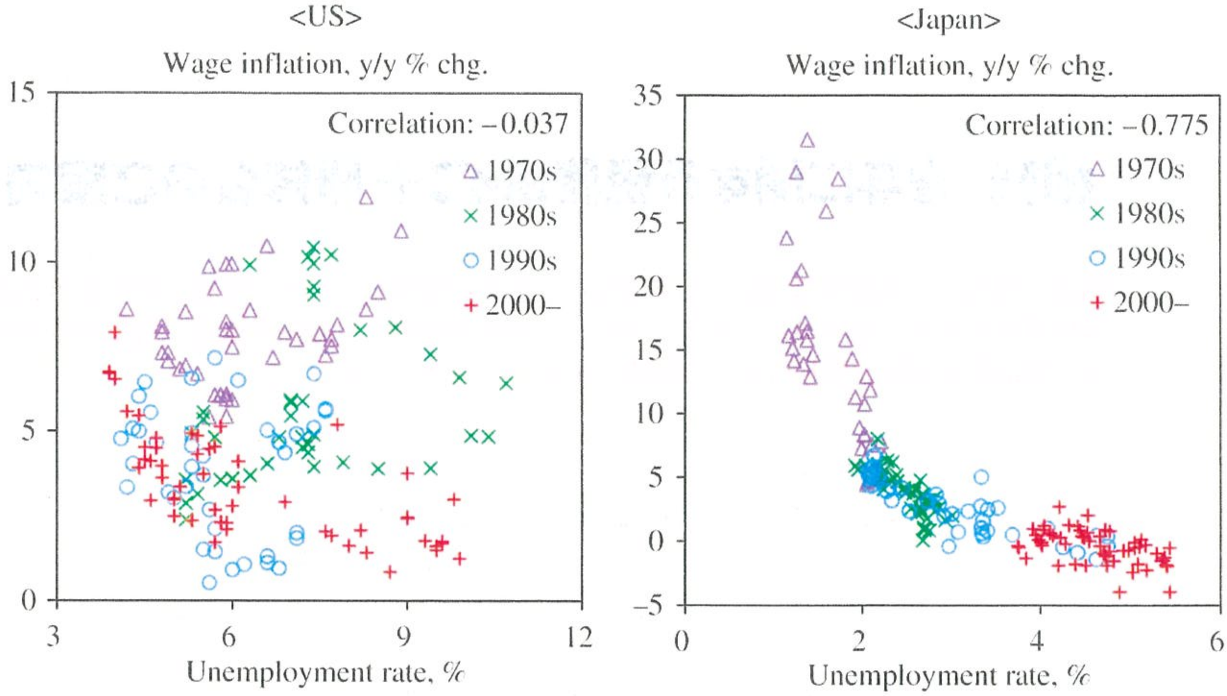
② シェアリングエコノミー

無理して買わなくてもいい

頑張ることもない

縮少する需要

「高圧経済」？



Muto and Shintani."An Empirical Study on the New Keynesian Wage Phillips Curve: Japan and the US" *The B.E. Journal of Macroeconomics*,2017.

中央銀行の非伝統的金融政策

目的

a. インフレ期待に働きかける

b. 金融機関のリスクテイクを促す

手段

1. マイナス金利
2. バランスシートの拡大
3. 長期国債の購入

中央銀行がインフレ目標を
掲げるのは、貨幣を尊とさせ
るから目的。
インフレにはならない

上智大　経済学部　竹田陽介教授レジメから

(2) 日本銀行の金融政策

① 異次元緩和は、いつまで

出口に向けた手法

大規模緩和は開始から既に

6年が経過し、大量の国債購入やリスク資産購入

による副作用も顕在化している

国債価格の下落圧力　金利は上昇

② 国債の需給の変化

国債の価格がどこまで下落　？

金利がどこまで上昇するか　？

③ 日銀、債務超過の恐れ

2018 日銀の総資産	557兆円	100％
〃 自己資本	4 〃	0.007	0.7％
〃 資産中の国債	470 〃	~~0.844~~ 84.4	％

1％の~~金利~~リスク引き上げ　△4.2兆円で

8/8は債務超過

日本政府債権(国債)に1％の~~金利~~リスク引き上げをすると日銀の8/8は債務超過になる!!

⑤ 東京五輪後の金融危機（株価）

(イ) 日銀の ETF（指数連動型上場投資信託）

2018. 3　24.8兆円.

2019. 3　30.0兆円超.　　2020. 11　40兆円

株価下落によるリスク 10%　3兆円

日銀の自己資本　4兆円

30兆円は限度超過、→退場

(ロ) 日経225連動型

日銀の退場が現実のものとなったとき、株式相場

今まで以上に急落のおそれ

2013年の株価 ——— 2019年の株価

1. 日銀の退場
2. 企業のコストカット努力の限界
3. 円高

(4) 日本は何をすべきか

①軌道修正する勇気

②デフレのままだと経済は衰退する

③成長なき社会へ突入
これに果敢に挑戦

④軌道修正する柔軟さ

⑤国民の中の不安の解消
社会保障に対する不安
政府の膨大な借務に対する不安

⑥これまで想定していなかった世界
政府の莫大な債務
少子高令化の加速度的な進行
経済成長が出来なくなった日

2019.08.26
2019.08.05
2019.06.24
2019.06.03
2019.04.15
2019.02.12
2018.09.18
2018.07.16
2018.05.14
2018.03.19
2018.01.15

積　分　の　定　石
（変化する量を集めて形にする）

会計と経営のブラッシュアップ
平成 29 年 9 月 25 日
山内公認会計士事務所

次の図書等を参考にさせていただきました。（微分と積分なるほどゼミナール　S58.1 岡部恒治著　日本実業出版社刊）
（微積分のはなし　1985.3 大村平著　日科技連刊）（Excel で学ぶ微分積分 H24.8 山本将史著オーム社）
（イラスト図解微分・積分　2009.6 深川和久著　日東書院刊）（微積分を知らずに経営を語るな PHP選書）
（Excel でやさしく学ぶ微分積分　室　淳子著 2006 東京図書）
内山力著

2019.10.07
2019.10.14
2019.10.28
2019.11.11

Ⅰ　身近な積分

1．積分の歴史

(1) 古代エジプトで積分の基礎が築かれた。（どうやって全体の面積を把握するか）

↓

ギリシャのアルキメデスが更に発展

↓

17C のニュートンとライプニッツが微分・積分を発明

現象を表現し ― その変化を把握し ― 結果を
$y=f(x)$　　$y'=f'(x)$　　$S=\int_a^b f(x)dx$
表現（現象）　微分（変化）　積分（結果）

社会科学 }
自然科学 } ⟶ グラフに描く ⟶ 機何学の問題になる

（現象）―（変化）―（結果）

積分→結果どうなったか、小さな変化をどのように形とするか
　小さなものから大きな形を得る、小さな変化を積み重ねるとどうなったかとその結果
　曲線で囲まれた土地の面積を直線化して調べる
　小さな変化は大きくなるとどんな形になったか
　変化する様子、変化する量をどうやって集めるか
∫　→インテグラルが付くと積分することを表す（　〃　）

変化する量はどんな形になるか。

∫小さいものを集める!!

S (SUM)のこと、離散は Σ　それに小さなものを

次のような技術は、すべて微分・積分がなければ発展しなかった。
コンピュータ、通信、光学機械、テレビ、ラジオ、CD、車、鉄道、飛行機、建築、経済学、物理学、化学、工学、農学…

経済学のための
数学入門
途中

第4章　積　分　法

(1)　不定積分

ある関数（たとえば総費用関数）$C=F(x)$ があり，その導関数（すなわち限界費用曲線）は，

$$\frac{dC}{dx} \equiv F'(x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で示された．「微分」の章では，ある関数から導関数を得る方法およびその意味が説明された．ここでは，反対に，限界費用曲線 $F'(x)$ からもとの総費用関数 $F(x)$ を求めるというような，逆の手続きが検討される．

導関数が $f(x)$ である関数 $F(x)$ があるとしよう．つまり，

$$F'(x) = f(x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

であるが，このとき，$F(x)$ は $f(x)$ の不定積分（indefinite integral）または原始関数（primitive function）と定義される．原始関数 $F(x)$ は，

$$\int f(x)\,dx \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

で表わされる．得られている $f(x)$ から，原始関数を求めることを，「積分する」という．積分される関数 $f(x)$ は被積分関数（integrand），x は積分変数と呼ばれる．$\int$ および dx は，$f(x)$ を積分するという印の記号と理解してよい．

$F(x)$ が $f(x)$ の不定積分の１つであれば，$f(x)$ の任意の不定積分は，

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad (C\text{は定数}) \qquad \cdots\cdots④$$

で表わされる．C は，積分定数（integration constant）と呼ばれる．いま，$f(x)$ の１つの不定積分を $F(x)$，他の１つの不定積分を $G(x)$，すなわち，$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=f(x)$ としよう．$H(x)=G(x)-F(x)$ として，

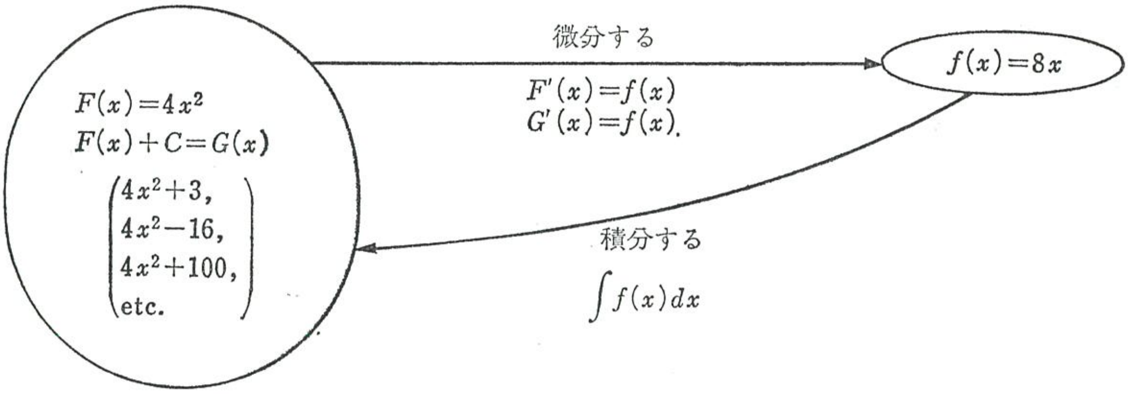
$$H'(x)=[G(x)-F(x)]'=f(x)-f(x)=0 \qquad \cdots\cdots⑤$$

である．$H'(x)$ が常にゼロであれば，$H(x)$ は定数であるから，それゆえ，

$$C=G(x)-F(x) \quad (C\text{は定数}),$$

$$\therefore\ G(x)=F(x)+C \qquad \cdots\cdots⑥$$

となり，④式が証明される．以上のことを理解するために，次のような図を書いておこう．



微分法と不定積分は，いわば，ごく近い親戚関係にある．つまり「微分する」ということと「積分する」ということは，お互いに逆の演算という関係にある．それゆえ，微分法についての知識は，不定積分を求める際に当然役立つ．以下に，次のような不定積分の諸公式を整理しておく．

（ベキ関数の公式）

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \cdots\cdots⑦$$

（定数倍の公式）

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \quad (k\text{は定数}) \qquad \cdots\cdots⑧$$

（定積分の定義）

関数 $y=f(x)$ の不定積分を $\int f(x)dx=F(x)+C$ とし、

a, b を $f(x)$ の定義域の任意の値とするとき、

点 b での不定積分の値と、点 a での不定積分の値との差は

$$\{F(b)+C\}-\{F(a)+C\}=F(b)-F(a)$$

となり、C の値に関係なく、a, b の値だけで決まる。

この $F(b)-F(a)$ を、

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{または} \quad \Big[F(x)\Big]_a^b \quad \text{と書く。}$$

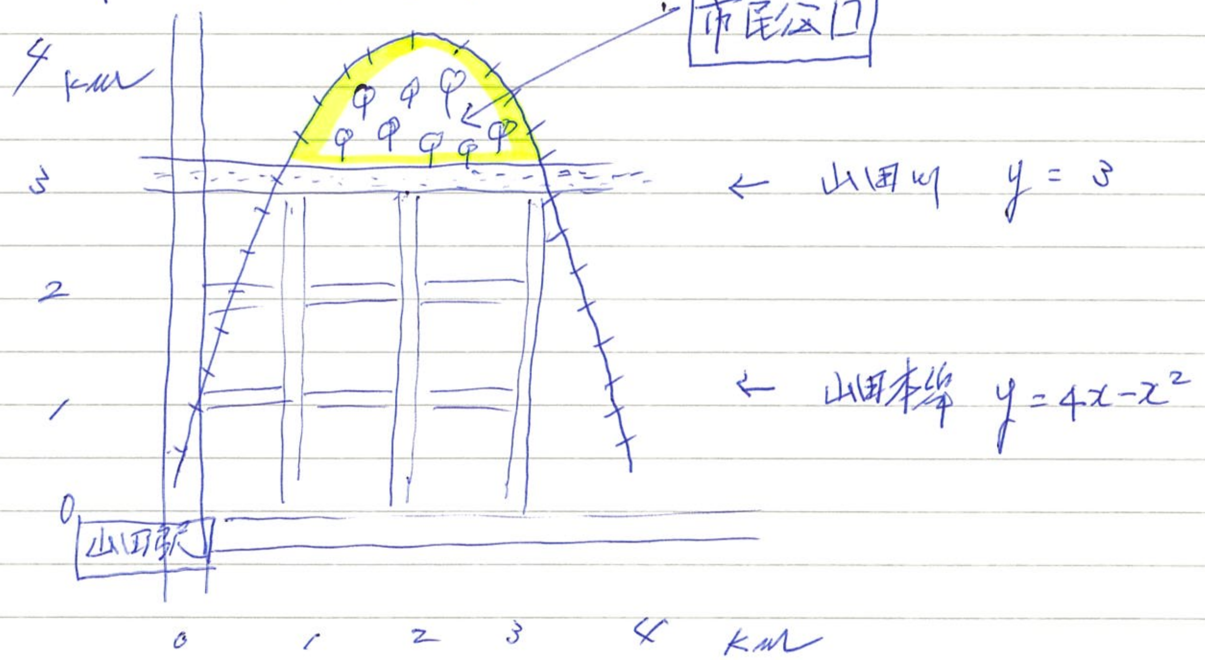
これを、関数 $f(x)$ の定積分といい、

a を下端，b を上端という

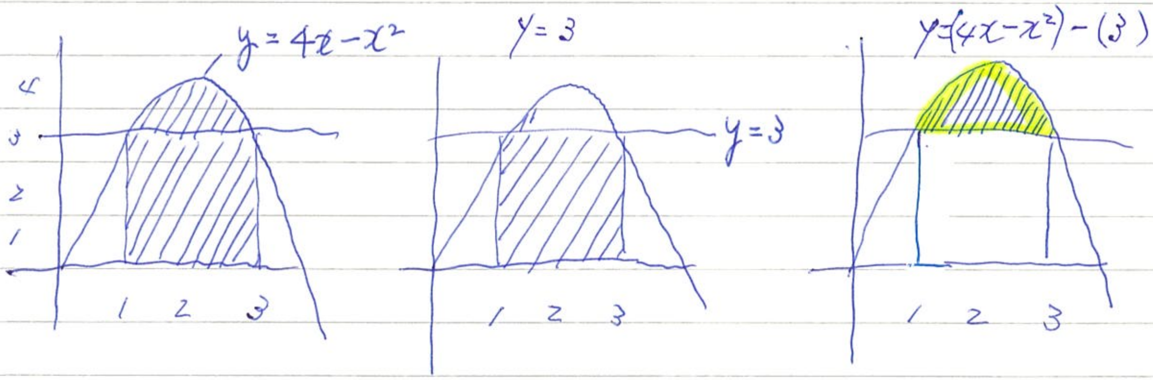
この定積分を求めることを、関数 $f(x)$ を a から b まで積分するという

正

5. 市民公園の面積



Ⓐ − Ⓑ = Ⓒ



$$\int_1^3 (4x-x^2)\,dx = \left[\frac{4}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_1^3 = \frac{22}{3}$$

$$\int_1^3 3\,dx = \left[3x\right]_1^3 = (3\times3)-(3\times1) = 6$$

2つに分けて計算した後、計算する。

$$\frac{22}{3} - 6 = \frac{4}{3}\ (km^2)$$

■定積分と面積

曲線で囲まれた図形の面積を求めよう

◆リーマン和

前述のように、積分は面積を求めるために考えられたものである。では、なぜ定積分が面積を表すのかをみていこう。

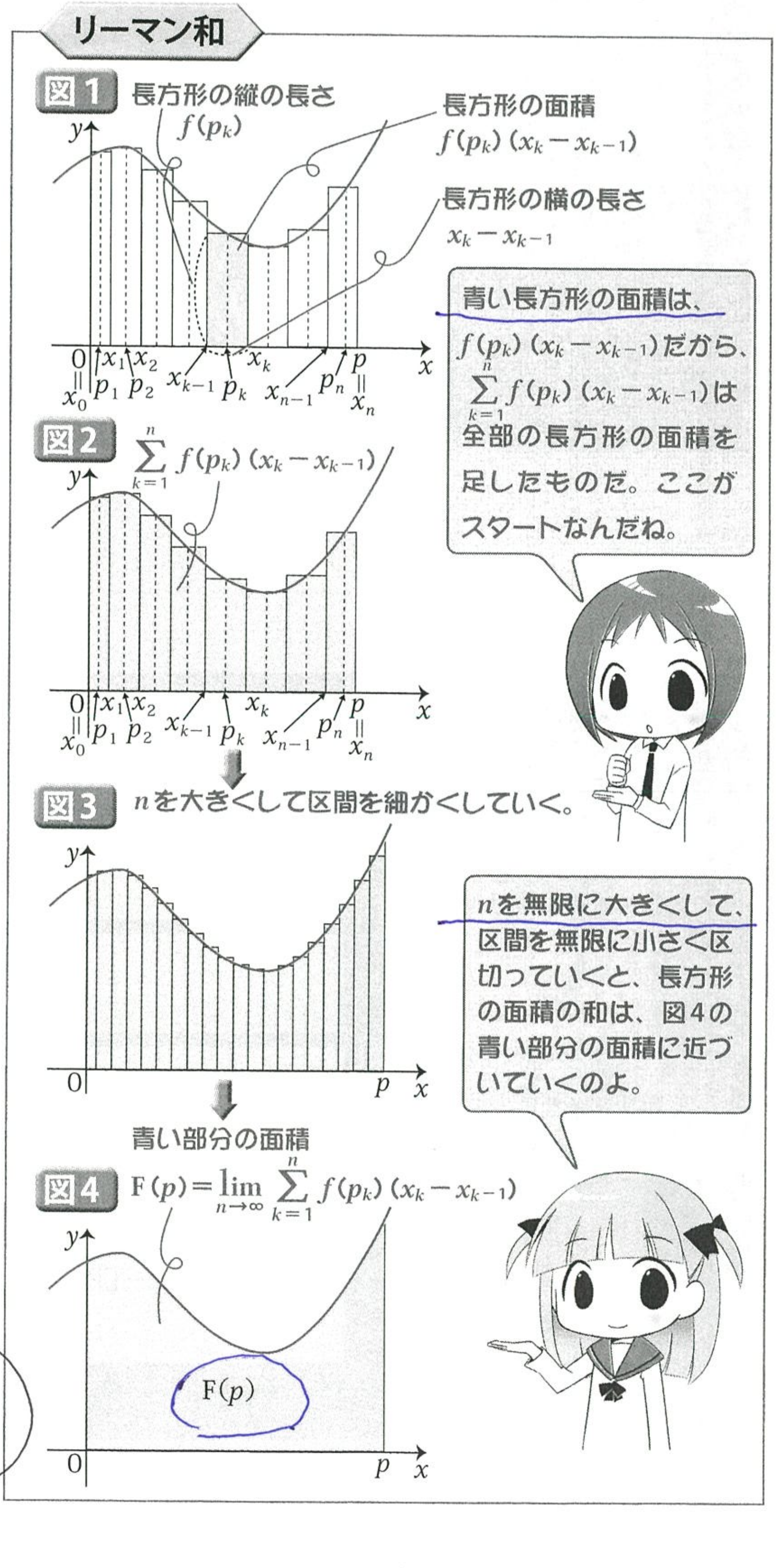
区間$0 \leqq x \leqq p$に、$0=x_0<x_1<x_2<x_3<\cdots<x_{n-1}<x_n=p$となるように、点$x_k$（$k=0$、1、2、…、$n$）をとり、$n$個の区間$x_{k-1} \leqq x \leqq x_k$（$k=1$、2、…、$n$）から点$p_k$を1つずつとる。

区間$0 \leqq x \leqq p$で$f(x) \geqq 0$である曲線$y=f(x)$に対して、

$$\sum_{k=1}^{n} f(p_k)(x_k-x_{k-1})$$
$$=f(p_1)(x_1-x_0)$$
$$+f(p_2)(x_2-x_1)$$
$$+\cdots$$
$$+f(p_n)(x_n-x_{n-1}) \quad \cdots①$$

という和を考えよう。これをリーマン和という。

ここで、nを限りなく大きくし、各区間の幅x_k-x_{k-1}が0に近づくようにすると、①はある一定の値F(p)に近づく。この値F(p)は、曲線$y=f(x)$、x軸、$x=0$、$x=p$で囲まれた図形の面積である。



そこで、図5のように、区間$a \leqq x \leqq b$で$f(x) \geqq 0$である曲線$y=f(x)$に対して、この曲線と3つの直線$x=a$、$x=b$、x軸で囲まれる図形の面積をSとすると、

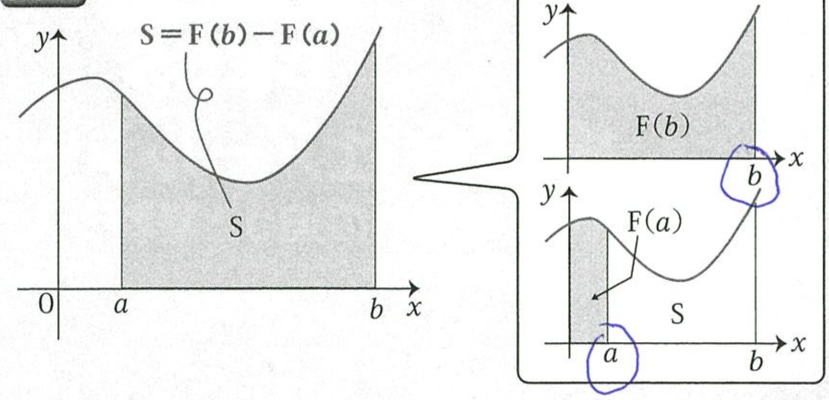
$$\mathrm{S}=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a) \quad \cdots②$$

が成り立つ。

直線で区切られた図形の面積

3つの直線$x=a$、$x=b$、x軸で囲まれる図形の面積は、0からbまでの面積F(b)から、0からaまでの面積F(a)を引けばいいのよ。

図5



◆F(x)の微分を考えよう

つぎに、pをxに置き換えて、関数$y=\mathrm{F}(x)$を考え、$\mathrm{F}'(x)=f(x)$が成り立つことを示す。図6のように、xから$x+h$の間の長方形ABCDと長方形ABEFを考える。

❶各部分の面積の大小を比較する。

長方形ABEFの面積＜青い部分の面積＜長方形ABCDの面積

❷各部分の面積を式で表す。

長方形ABEFの面積$=f(x)h$

長方形ABCDの面積$=f(x+h)h$

青い部分の面積$=\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)$

❸大小の比較に式を入れる。

$$f(x)h<\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)<f(x+h)h$$

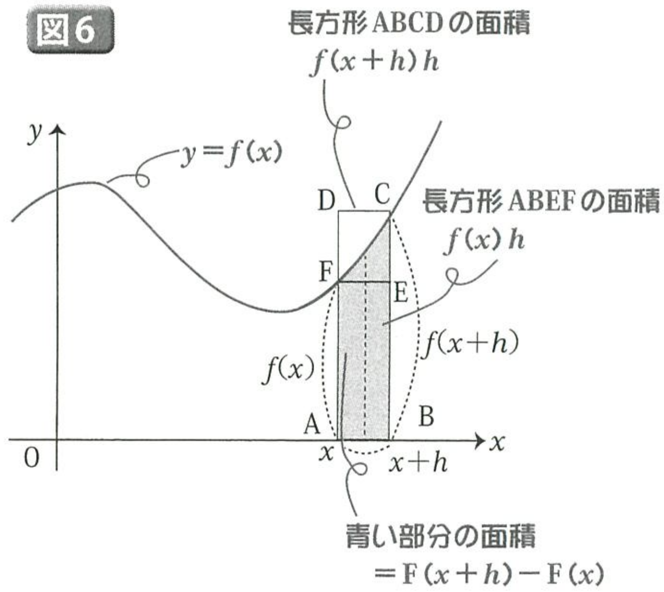
❹各辺をhで割る。

$$f(x)<\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}<f(x+h)$$

❺hを0に近づける。

$$f(x) \leqq \lim_{h \to 0}\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h} \leqq f(x)$$

図6



Ⅲ、面積と体積を求める F

1、関数に囲まれた面積

(1) ①と②に囲まれた面積 S は、

$f(x)=x^2$ ―① $g(x)=-x^2+2x+4$ ―②

$f(x)$の頂点は $f'(x)=2x$、$x=0$、$(0,0)$

②を微分すると $g'(x)=-2x+2$

頂点は、$g'(x)=0$ とおいて、$0=-2x+2$、$x=1$ である。

そこで、$g(x)$に $x=1$ を代入して $g(1)=-1+2+4=5$ で

$g(x)$の頂点は $(1,5)$ となる。

グラフ①と②の交点は、$f(x)=g(x)$ を解くと、

$x^2=-x^2+2x+4 \longrightarrow 2x^2-2x-4=2(x^2-x-2)=2(x+1)(x-2)=0$

よって、①と②は -1, 2 で交わる

すなわち、x方向は(ヨコ)、$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲となる。

y方向(タテ)の長さを $h(x)$とすると、

グラフより、$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $f(x) \leqq g(x)$ なので

$h(x)=g(x)-f(x)=-x^2+2x+4-x^2=-2x^2+2x+4$

すなわち、y方向(タテ)の高さは、$-2x^2+2x+4$ となる。

これを定積分すると、

xの範囲(ヨコ)とyの方向の高さ(タテ)の関数がわかったので

$$S=\int_{-1}^{2} h(x)\,dx=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(-\frac{2\times 2^3}{3}+2^2+4\times 2\right)-\left(-\frac{2\times(-1)^3}{3}+(-1)^2+(4\times -1)\right)$$

$$=\left(-\frac{16}{3}+4+8\right)-\left(\frac{2}{3}+1-4\right)=9$$

下

2. 関数に囲まれた体積

作成日 .24

作成者

積分は面積を求めるばかりではなく、

かけ算をして意味がある~~全体量~~ならば、

xの範囲がわかって、yが関数で表わされれば、定積分が使える。

8(m²) 面積

10m 長さ

(1) 例えば、曲がってはいるが、どこを切っても断面積が 8(m²) になる

長さ 10(m) の管の体積 V_1は、　高さ 面積

長さの方向をx方向とし、断面積を積み重ねて体積を求めると、

$$V_1 = \int_0^{10} 8\,dx = \Big[\,8x\,\Big]_0^{10} = 80\ (m^3)$$

y軸 (断面積)高さ　x軸 (長さ・幅)

$8(m^2) \times 10(m) = \underline{80\ m^3}$

(2) 次に、形はわからない物体の体積 V_2は、

方向の長さが5で、断面積 Sは $3x^2+10$ とすると、

$$V_2 = \int_0^{5} (3x^2+10)\,dx = \Big[\,x^3+10x\,\Big]_0^{5} = 175$$

x軸 幅 dx

$\underbrace{(3x^2+10)\,\underline{m^2} \times dx\,\underline{m}}$

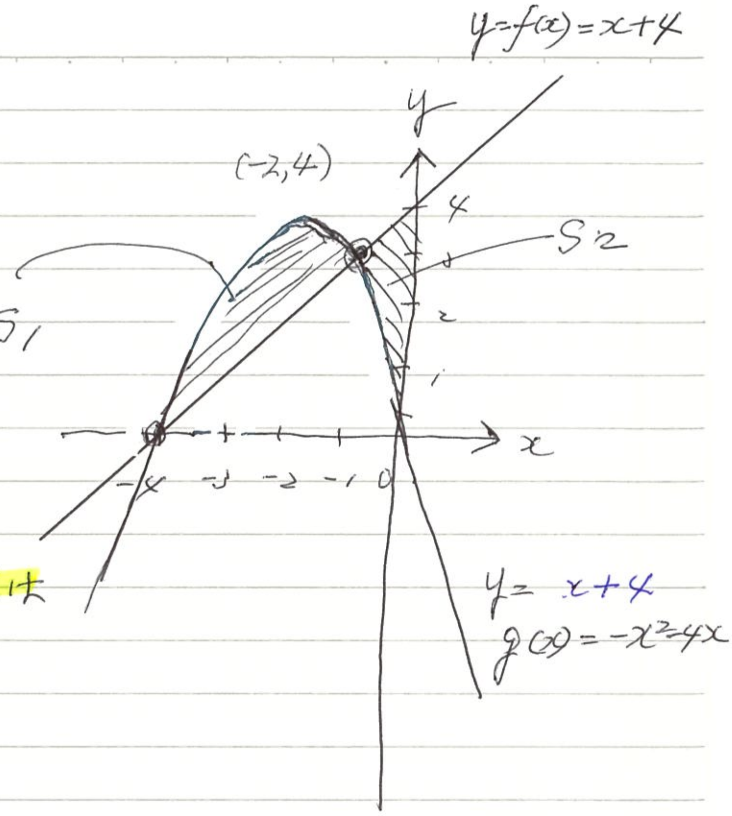
断面積・高さ y軸

$\frac{3}{3}x^3 + 10x = (5)^3 + 10(5) = \underline{\underline{175\ m^3}}$

交差する関数に囲まれた面積

$f(x) = x+4$

$g(x) = -x^2-4x$



(1) グラフを描く、頂点を求める

$f(x) = x+4$

$g'(x) = -2x-4 \rightarrow x=-2$

$x=-2$のとき $g'(-2)=0$で、

$g(-2)=4$ なので $g(x)$の頂点は

$(-2, 4)$

(2) 交点を求める

$f(x)=g(x)$の2次方程式を解くと

$x+4=-x^2-4x \rightarrow x^2+5x+4=0 \longrightarrow (x+1)(x+4)=0$

よって $x=-4, -1$ で、交点は、 $x=-4 \rightarrow y=-4+4=0$ $(-4,0)$

$x=-1 \rightarrow y=-1+4=3$ $(-1,3)$

(3) y方向の長さを求める

グラフより S_1の $-4 \leqq x \leqq -1$ で、$f(x) \leqq g(x)$

S_2の $-1 \leqq x \leqq 0$ で、$f(x) \geqq g(x)$

(4) 定積分

?

$$S_1 = \int_{-4}^{-1} \{g(x)-f(x)\}\,dx = \int_{-4}^{-1} (-x^2-5x-4)\,dx = -\int_{-4}^{-1}(x+1)(x+4)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(-1+4)^3 = \frac{9}{2}$$

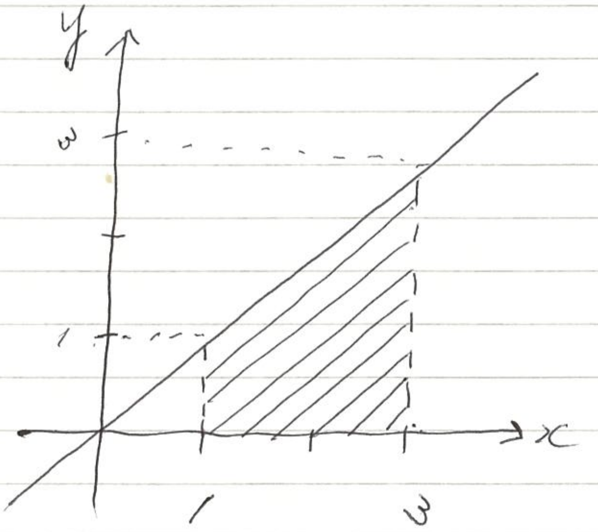
$$S_2 = \int_{-1}^{0} \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int_{-1}^{0} (x^2+5x+4)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}(x^2)+4x\right]_{-1}^{0}$$

$$= -\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-4\right) = \frac{11}{6}$$

正

定積分で面積を求める (グラフに囲まれた面積を求め

$y = x$ の定積分



1から3の範囲で定積分する

y=x 高さ

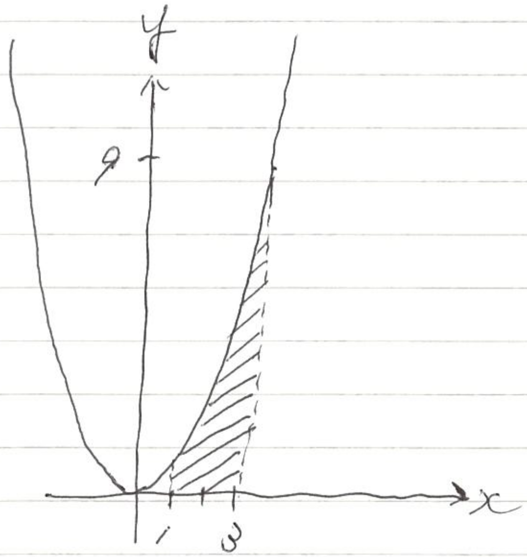
微小のx 長さ

$$\int_1^3 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{2}(3)^2 - \frac{1}{2}(1)^2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

$y = x^2$ の定積分

1から3の範囲で定積分する



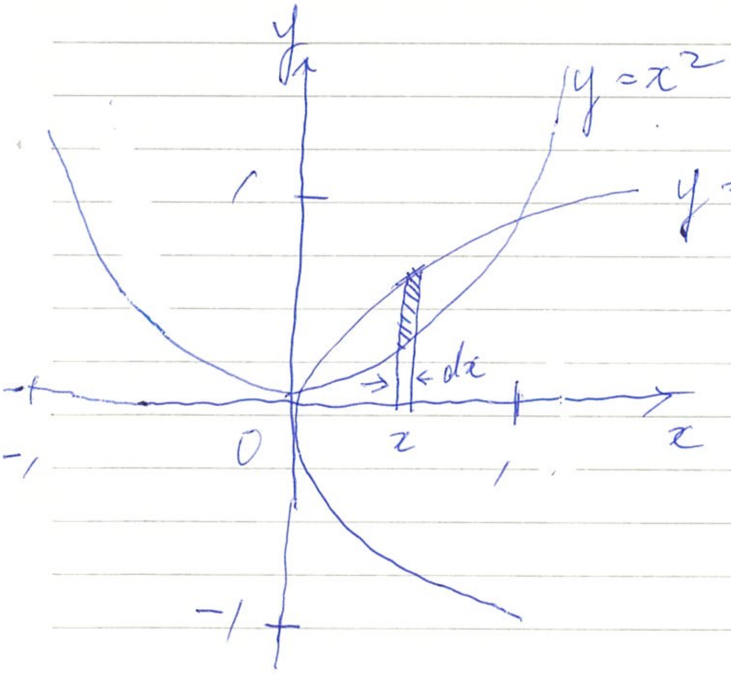
$$\int_1^3 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{3}(3)^3 - \frac{1}{3}(1)^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

(1) 自然現象
社会現象 の表現 $y=f(x)$ （等式）

(2) 〃 の変化 $y'=f'(x)$ （微分）

(3) $f(x)$と x軸に はさまれた面積 $S=\int_a^b f(x)\,dx$ （積分）
自然現象の結果、姿



高さ
▨ 図形の縦方向の長さ
$y=\pm\sqrt{x}$
$y=x^2$
$\sqrt{x}-x^2$

横幅 dx

面積 $dS=(\sqrt{x}-x^2)\,dx$

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\int(x^{\frac{1}{2}}-x^2)\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}+1}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

偏微分

2019.08.13
2019.07.08
2019.06.10
2019.11.04

参考にさせていただいた書　（微積分のはなし（下）大村平著 1980.11 日科技連刊）
（経済数学早わかり 西村和雄著 S63.4 日本評論社刊）

1. 社会現象や自然現象は一つの要因によって結果が決まるほど単純なものばかりではない。

$y = f(x)$ …… 一つの要因

3次元、4次元の世界における微分が必要!!

(1) 二つ以上の要因が結果を支配することのほうが多い

$$x_0 = \frac{2V^2}{g} \sin\theta \cos\theta$$

なにかを投げるとき、それが飛ぶ距離 x_0 は、
投げ出す角度 θ と
物体に与えられる初速度 V …… 二つの要因
の両方によって支配される

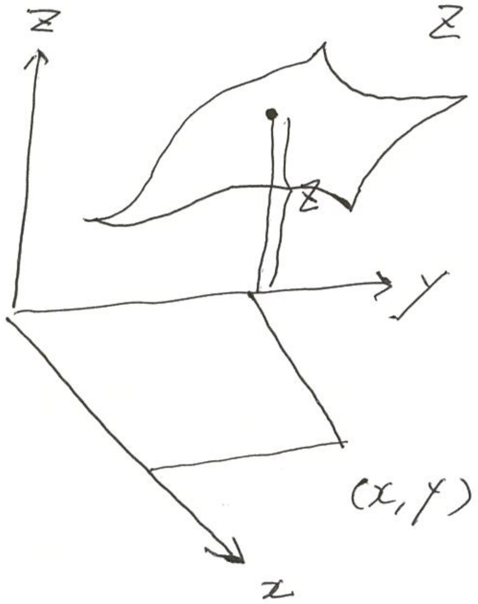
つまり

$x_0 = f(V, \theta)$ の関数関係となる

(2) V の微小変化に対する x_0 の変化の割合はどうなるか
θ の微小変化に対する x_0 の変化の割合はどうなるか

$z = f(x, y)$ とも書く

2、偏微分のグラフ



$z=f(x,y)$ 曲面

そして、$z=f(x,y)$ を x で微分することを '$y=f(x)$……

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$$ などと書き、

x で偏微分されてできた関数を偏導関数と呼び、

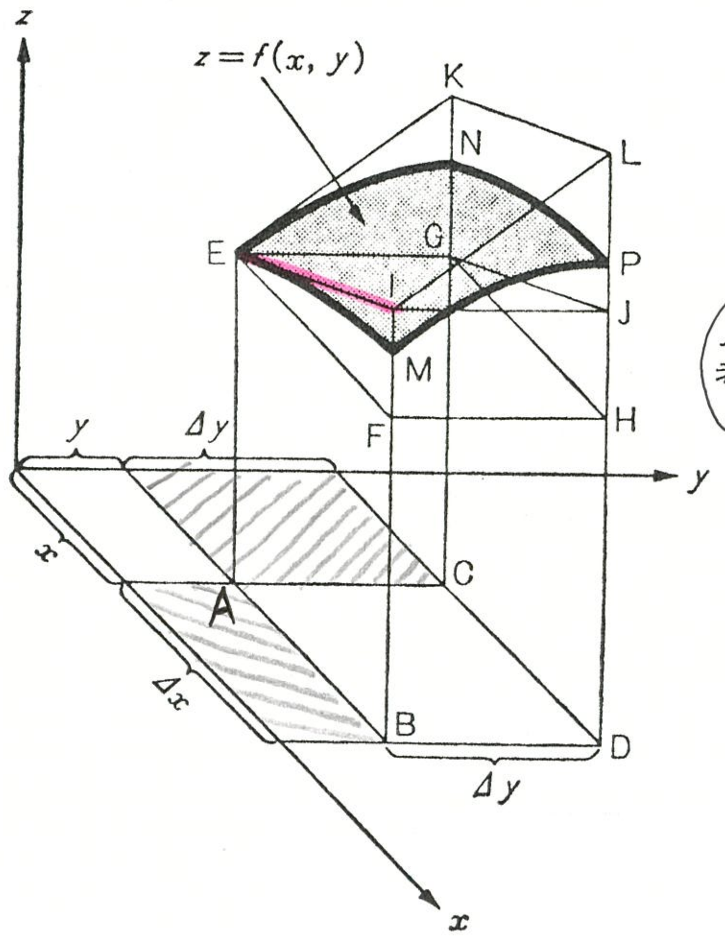
z_x, f_x, $f(x,y)$ などと書く

1

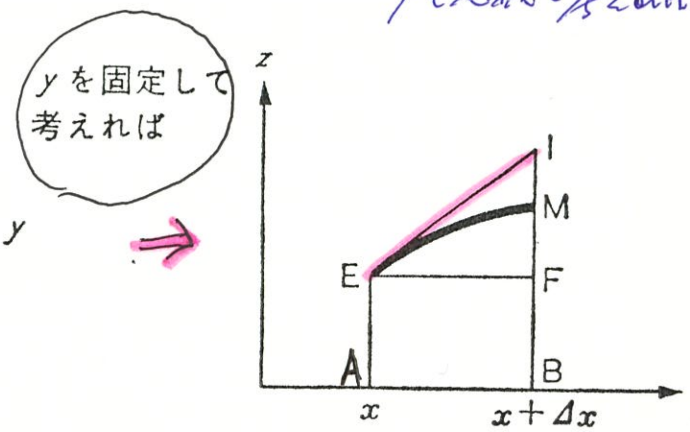
微分とは、変数 x が変数 y の関数であるとき、x の変化分 (Δx) を限りなくゼロに近づけていくときに、それに対応して y がどれだけ変化するのか (Δy と表す) を求める操作を意味する。

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

3. xy平面上のAを基準にして、x軸方向にΔx、y軸方向にΔy の小さな長方形を切り取る。



yを定数と考えれば…



EIにそって、Δxの微小変化に対するzの変化の割合は $\frac{FI}{EF}$

$$\frac{FI}{EF} = \lim_{EF \to 0} \frac{FM}{EF} \qquad EF = \Delta x$$

$$FM = BM - BF$$
$$= BM - AE = f(x+\Delta x, y) - f(x, y) \text{ となり、}$$

xの微小変化に対するzの変化の割合は、

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \lim_{EF \to 0} \frac{EM}{EF} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \text{ となる。}$$

同様に、yでzを微分するという意味は、

$$\lim_{EG \to 0} \frac{GN}{EG} = \lim_{EG \to 0} \frac{CN - CG}{EG} = \lim_{AC \to 0} \frac{CN - AE}{AC}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \text{ と表わされる}$$

このように、変数が二つ以上ある場合の微分を、偏微分と呼ぶ。

4. 偏微分は、二つ以上の変数に決まる関数があり、

ある変数の微小変化に対する関数の変化の割合を求めることであり、

その物理的な意味合いは、次の式の通りである。

$$(1)\quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$(2)\quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

これは、微分の物理的な意味である表現

$$(3)\quad \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(1)と同じ形である。

yを定数とみなして、$f(x)$をxで微分するときと同じように

xで微分している理屈である。

従って、$f(x, y) = -x^2 + xy - y^2 + 2x + y$

をxで偏微分するには、yを定数とみなして、xでふつうに

微分すればよく

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = -2x + y + 2$$ となる

yを定数とみなすということは、あるyのところでy軸に直角な平面を

考え、その平面と$f(x, y)$曲面とが交わって作り出す曲線だけを

問題にするということである。

つまり、yを定数とみなした瞬間に$f(x, y)$の曲面は前頁No.3の

右図となる。

5. $f(x, y)$ を x で偏微分するときには、仮に y を定数とみなして、普通に微分すればよい。

（3Dの右図と考えればよい）

しかし、微分が終ったとたんに、y が定数ではなく、変数であったことを思い出す必要がある。

$$f(x, y) = -x^2 + x\underline{\underline{y}} - y^2 + 2x + y$$

を偏微分すれば

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \underline{\underline{y}} - 2y + 1$$ となる

このことは、ある x と y とにおける $f(x, y)$ 曲面の x 軸方向の傾きが、その位置によっても、y の位置によっても変化することを意味する。

$z = f(x, y) = \sin(x \cdot y)$ を、x と y について偏微分すれば、

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cos(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cos(x, y)$$ となる

6. 高階の偏微分

偏微分をつぎつぎと行う

$$z = -x^2 + xy - y^2 + 2x + y$$

を、とことんxで偏微分してゆくと

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x + y + 2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0$$

一回目はxで偏微分し、二回目はyで偏微分する

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x + y + 2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$

一回目をyで偏微分、二回目をxで偏微分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

1回目の偏導関数	f_x
2 〃	f_{xx}
1回目x, 2回目y	f_{xy}

7. 曲面の極大 極小

$$z = -x^2 + xy - y^2 + 2x + y$$

偏微分して、

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x + y + 2 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x - 2y + 1 = 0$$

極大、極小を求めるためにゼロとおく

この連立方程式を解くと

$$x = \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{4}{3}$$

これが、z曲面の頂点を表すxとyの値、

いいかえれば、zが極大となるxとyの値である。

その時の頂点の高さは、xとyを $z = f(x, y)$ に代入して、

$$z = \frac{7}{3}$$

8、全微分

曲面を表わす関数 $z=f(x,y)$ の極値は

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=0$$

を連立して解くだけでは充分ではない。

そこで全微分を考えると、

$z=f(x,y)$ の全微分は、

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$ で表わされる

上記の式においては dx と dy は互に何の関係も持たない。

つまり、dx が dy の10倍であっても、また dx と dy の符号が反対であってもいっこうに構わない

9

9.2 偏　微　分

1変数関数のときと同じように，関数の連続性をグラフで定義する。

定義 9.2　2変数関数の連続性

2変数関数 $f(x,\ y)$ は，そのグラフ $z=f(x,\ y)$ の曲面に裂け目がないときに**連続**という。

これからは，基本的には，定義域内で連続な2変数関数のみを扱うので，連続であることを一々断らない。

1変数のときは，グラフの曲線を拡大して$\boxed{\text{線分}}$とみて，その傾き(＝接線の傾き)から関数を分析したが，同じようなことをグラフの曲面についても行う。つまり，曲面の一部分を拡大して$\boxed{\text{平面}}$と見てその平面の状況を探るのである。そのために，1変数のときの微分にあたるものを定義する。

定義 9.3　偏微分

関数 $z=f(x,\ y)$ の y を定数とみなし，x で微分したものを z_x，あるいは $f_x(x,\ y)$，あるいは $\dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}$ などとかき*)，
$z=f(x,\ y)$ の x による偏微分という。

同様に，関数 $z=f(x,\ y)$ の x を定数とみなし，y で微分したものを z_y，あるいは $f_y(x,\ y)$，あるいは $\dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}$ などとかき，
$z=f(x,\ y)$ の y による偏微分という。

また，$f(x, y)$ が x，y 両方向に偏微分できるとき，**偏微分可能**という。

これがなぜ，「曲面を拡大して平面とみなすこと」なのかについて，説明が必要だろう。

*)　∂ は「ラウンド」と読む。

それは，偏微分の定義からただちに出てくる次の事実による。

▶ 性質 9.1

点 $(a,\ b)$ での偏微分の値 $f_x(a,\ b)$ は，$y=b$ なる平面で曲面を切ったときに，断面に現れる曲線のその点での接線の傾きに等しい。また，$f_y(a,\ b)$ は $x=a$ という平面で曲面を切ったときに現れる曲線のその点での接線の傾きに等しい。

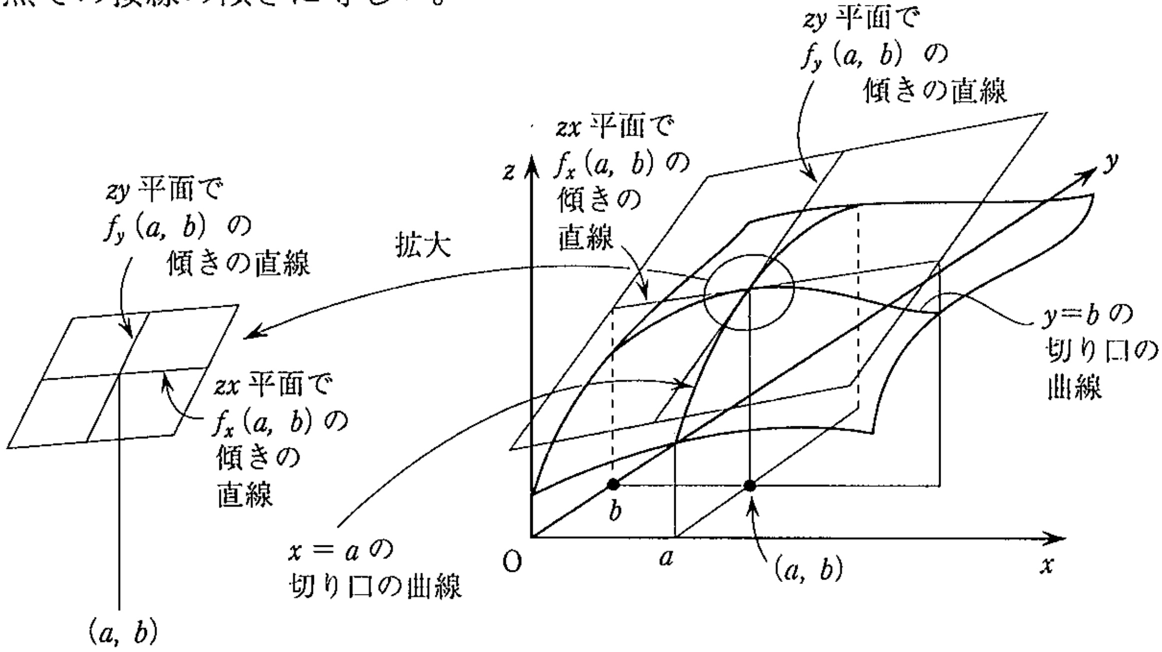


図 9.4

このことより，曲面を十分大きく拡大したときに現れる平面（**接平面**）の，x 軸方向の傾きが $f_x(a,\ b)$ で，y 軸方向の傾きが $f_y(a,\ b)$ とわかる。

この 2 方向の傾きは，定義9.1の $z=mx+ny+k$ での，x 軸方向の傾き m と y 軸方向の傾き n に対応する。つまり，$f_x(a,\ b)$ が x の係数で，$f_y(a,\ b)$ が y の係数だった。

よって，次の定理が成り立つ。

▶ 定理 9.2

点 $(a,\ b)$ 上の曲面の点での，接平面の式は，

$$z=f_x(a,\ b)x+f_y(a,\ b)y+k$$

とかける。