経済学数学（第6回）

No. 2019.06.03
2019.03.11
Date 2019.03.18
2019.05.20
2019.03.…

参考図書　1963 岡村宗二著　経済学のための数学入門　同文舘刊
2000.12 岡部恒治著　経済数学入門　新世社刊
2010.12 竹之内脩著　経済・経営系　数学概論　新世社刊

関数関係　　$U = U(x, y)$

親の給料　x

子供の小遣い　y

(1) 陰関数的表示　$f(x, y) = 0$

(2) 陽関数的表示　$y = f(x)$

$x \xrightarrow{f} y$　　ある関係 (f) を通して　x と y の関係を見る

$C = C(Y)$

消費 C が国民所得 Y に依存して決められる

このとき f のかわりに C を使っている

C が Y と比例的に変化する

↓

$Y=0$ のとき $C=b$ とすると

$C = aY + b \quad (a>0, b>0)$

$U=U(x, y)$ の効用関数は、

x と y を消費する（定める）とき、なんらかのルールを介して

効用（満足）U が得られる（定まる）という関係を示している

1. 微分係数

(1) 総費用関数 $C=\pi(x)$

生産量xがごくわずか増加したとき、総費用Cはどれだけ増加するか

xの変化分 $\Delta x = x_1 - x_0$

yの変化分 $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

これは xがx_0からx_1に変化したときの、

yへの平均変化率 (average rate of change) にあたる。

(2) 平均変化率

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 差分商 (divided difference)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$f(x)$のx_0における微分係数 (differential coefficient)

又は変化率 (rate of change)

$\Delta x (=h) \longrightarrow 0$ のとき

$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ は接線の傾きとなる。

(3) 基本的な微分の公式

① 和と差の公式

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

② 積の公式

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

③ 商の公式

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

④ 定数倍の公式

$$[kf(x)]' = kf'(x)$$

⑤ べき関数の公式

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

3、合成関数の微分

(1) $y=f(u)$、$u=g(x)$ から $y=f[g(x)]$ とすれば、y は x の関数で表わされる。
（合成する）

$y=f[g(x)]$ は、2つの関数の合成関数 (composite function) と言われる。

例えば、国民所得 y は、投資 i の関数であり、投資 i が時間 t の関数とすると
$y=f(i)$、$i=g(t)$ で、y は t の関数となって、
（合成する）
結局、$y=f[g(t)]$ と表わされる

その導関数は、

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f[g(x+h)]-f[g(x)]}{h}$$ となる

ここに $m=g(x+h)-g(x)$ とおくと

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(u+m)-f(u)}{m}\cdot\frac{m}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(u+m)-f(u)}{m}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$ となる

$h\to 0$ であるから、$m\to 0$ である。故に

$$y'=\lim_{m\to 0}\frac{f(u+m)-f(u)}{m}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$ となる

10、偏微分係数と偏導関数

(1) ある領域で定義されている関数　$z=f(x, y)$ がある。

独立変数が2個あるが、2個のうち片方の変数を定数とみれば、

1変数のみの関数になる。

すなわち、偏微分係数 (partial differential coefficient) とは、

$f(x, y)$ の一点を (x_0, y_0) として、

$$f_x(x_0, y_0) \equiv \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) \equiv \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$f_x(x_0, y_0)$ は、点 (x_0, y_0) における $f(x, y)$ の x に関する偏微分係数

$f_y(x_0, y_0)$ は、点 (x_0, y_0) における $f(x, y)$ の y に関する　〃　という。

(2) ~~経済量~~間の関係

① 効用関数は、　$u=f(x_1, \cdots, x_n)$

u：効用　, x_i 消費財の数量

② 生産関数は、　$z=g(y_1, \cdots\cdots, y_m)$

z：生産量　, y_i 生産要素の投入量

③ 効用関数の x_i に関する偏導関数

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv f_{x_i}$$

i 財の限界効用

⑧ i財の限界効用は、

x_i以外の変数が変化せず(定数とみて)、x_iのみが微小分だけ変化したときの効用uの変化分を示す。

このように、経済分析においては、偏導関数を求めることが頻繁に行われる

(3) 1階の偏導関数

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \equiv f_x(x,y) \equiv f_x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \equiv f_y(x,y) \equiv f_y$$

(4) 更に偏微分可能ならば、

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f_{xx}(x,y)$$

が得られる

(5) $z=3x^2+2y+1$ の偏導関数

$$\frac{dz}{\partial x} = 6x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2$$

13、経済への応用

(1) 微分・偏微分が、経済学の中でどのように使われているのか。

(2) 1種類の財を生産する企業

生産関数 $y=f(x)$ ……増加率逓減の法則

$\underline{x}$ …… 原料の量

$\underline{y}$ …… 生産物の量

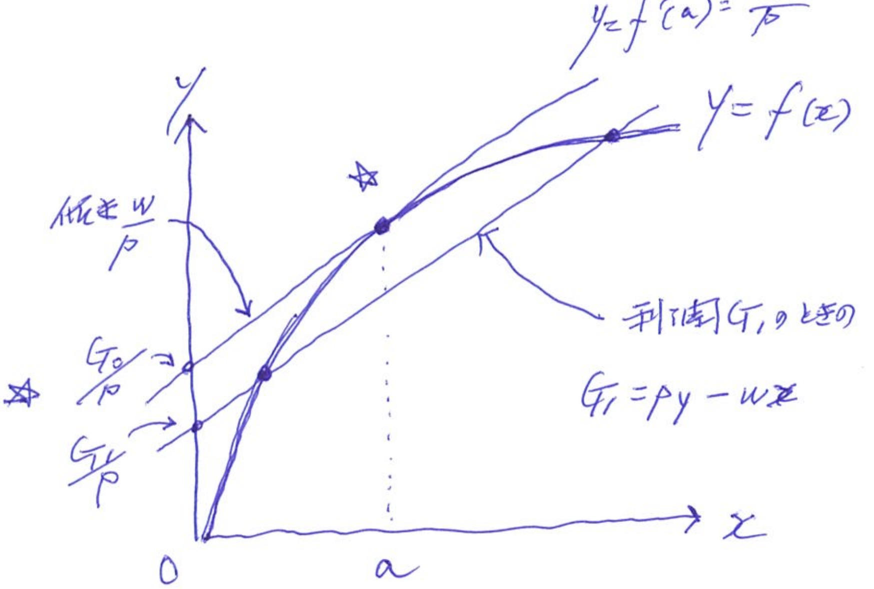
このとき、原料と生産物の価格がそれぞれ $\underline{w}$（原料価格）と $\underline{p}$（生産物価格）とすると

企業の利潤 G は、

$$G = py - wx$$ ……すべてが売れたとしたら

このとき、利潤の最大値を与える原料の量が $x=a$ ならば、

$$pf'(a) = w$$



グラフは、G を変化させたとき、y切片が $\frac{G}{p}$ で傾き $\frac{w}{p}$ で一定の直線である

y切片が最大値の G_0 をとるのは、☆、$y=f(x)$ と接するときである。

接線の傾き☆より、$f'(a)=\frac{w}{p}$ が成立する式である。

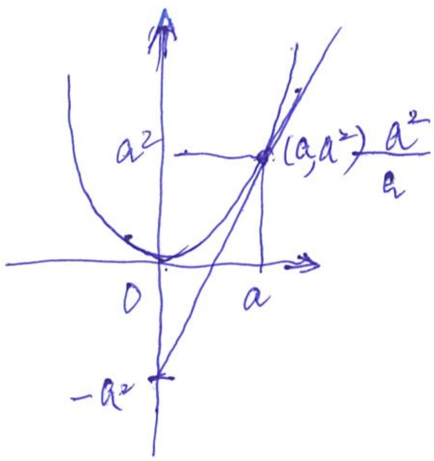
21/ すべての2次関数のグラフは $y=x^2$ と相似である。

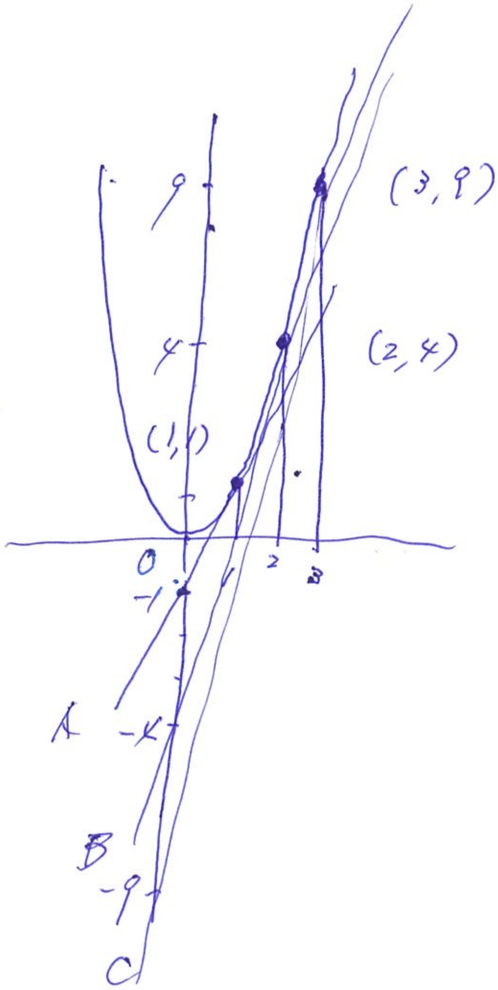
2次関数の微分は、

(1) $y=x^2$ の平行移動

(2) 相似の拡大、縮小　に注意が必要、

22　接線の傾き





接線の傾きは、

A線は傾き 2
($x \to 1$ $y \to 2$)

Bは傾き 4
($x \to 2$ $y \to 8$)

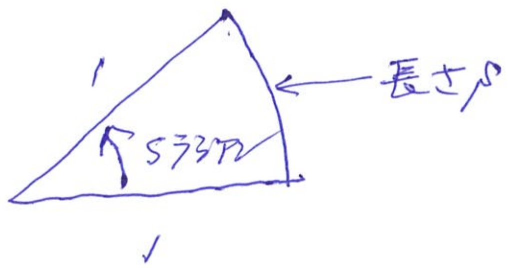
Cは傾き 6
($x \to 3$ $y \to 18$)

x座標	……	-3	-2	-1	0	1	2	3 ……
接線の傾き	……	-6	-4	-2	0	2	4	6 ……

3/ ラジアン

(1) 半径1の円を単位円という

この弧の長さがsのとき、「中心角はs(ラジアン)」という



(2) 単位円(半径)1の円周の長さは2πだから

1回転の角度(360°)は 2π(ラジアン)となる。

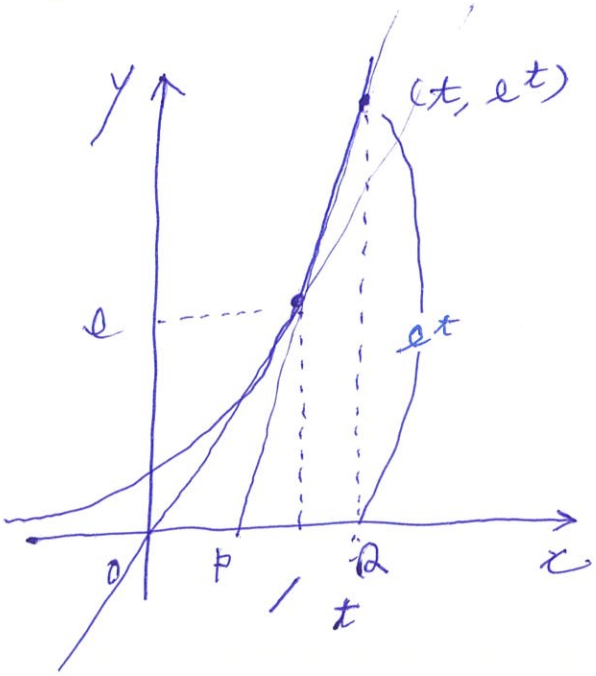
その半分の半円の角度180°は、1πラジアン、

更にその半分の垂直の角度90°は $\frac{\pi}{2}$ ラジアンとなる。

(3)

度数(°)	0	30	45	60	90	180	270	360
ラジアン	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

37 $y=e^x$ の微分



この曲線上の点 (t, e^t) での、接線の傾きは、

x軸方向に、1進む間に、上へ

$$0 \to e^t$$

と、e^tだけ上がっている。よって傾きは、

$$\frac{e^t}{1} = e^t \text{ となる。}$$

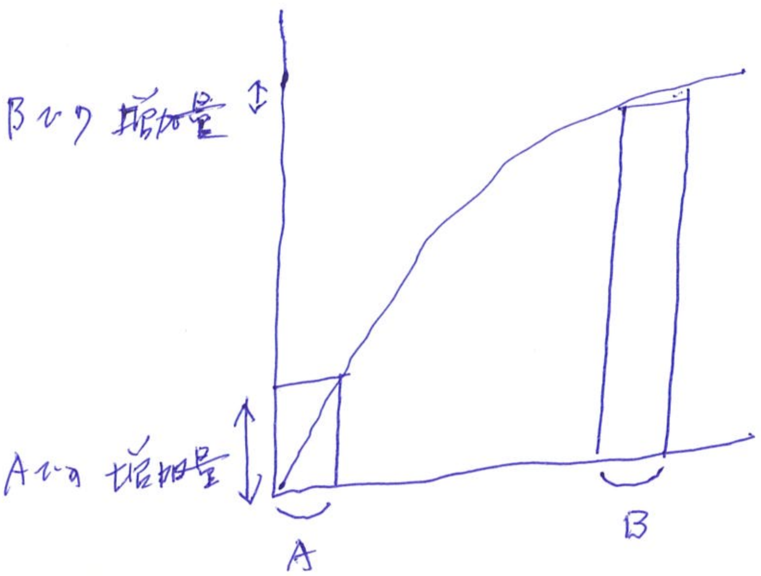
つまり、PQが 1だというのは、接線の傾きが接点の y座標と等しいことを意味している。

$f(x) = e^x$ のとき、$f'(x) = e^x$ となる

これを $(e^x)' = e^x$ と表す。

$f(x)$の導関数 $f'(x) = f(x)$ となる。つまり $f'(x) = f(x)$ と定めると、$f(x) = e^x$ になる。

増加率逓減の法則



満足度の関数

(1) 効用関数・限界効用

財の量が x のときの満足度を示す関数 $u(x)$ を効用関数という

財 x を1単位増やしたときの $u(x)$ の増加量を限界効用という

$x=a$ での限界効用

限界効用は減少する ― 限界効用逓減の法則

(2) 効用関数

① $u(x) \geqq 0$ 増加関数 ― 効用関数

② $u'(x) \geqq 0$ 〃 ― 限界効用関数

③ $u''(x) < 0$ 減少関数 ― 限界効用逓減の法則

41. 対数関数

(1) ウェーバーの法則

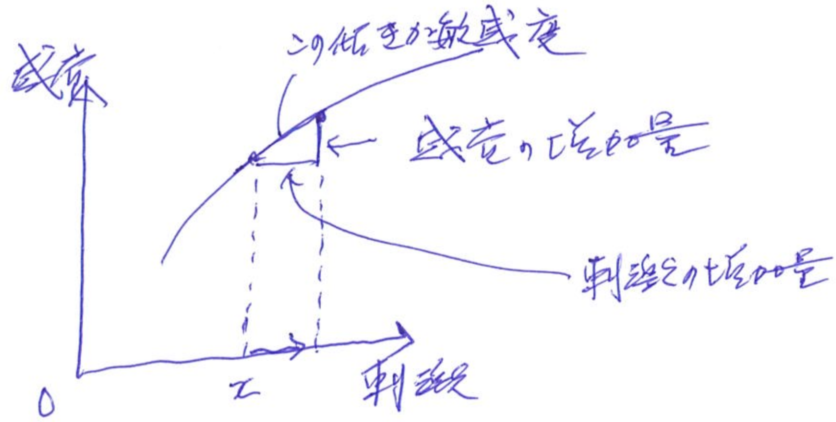
刺激の変化に対する敏感度は、その時点の刺激の大きさに反比例する。

(2) 限界効用逓減の法則は、

「財が増える」という刺激の変化に対する「満足感の増加」という敏感度の関係であって、ウェーバーの法則である。

(3) 刺激の大きさ x → 感じる感覚量 $y=f(x)$

敏感度は、$\dfrac{\text{感覚(満足)の増加量}}{\text{刺激の増加量}}$



これは接線の傾きで、y' である

これが、そのときの刺激の量 x に反比例するのだから

$$y' = \frac{k}{x}$$

After Private论

$$y = x^3 \qquad y' = \frac{dx^3}{dx} = 3x^{3-1}$$

$$dx^3 - dx = \underset{3}{d}x^{3-1}$$

経済学
レッスン6 (CD 21~15)

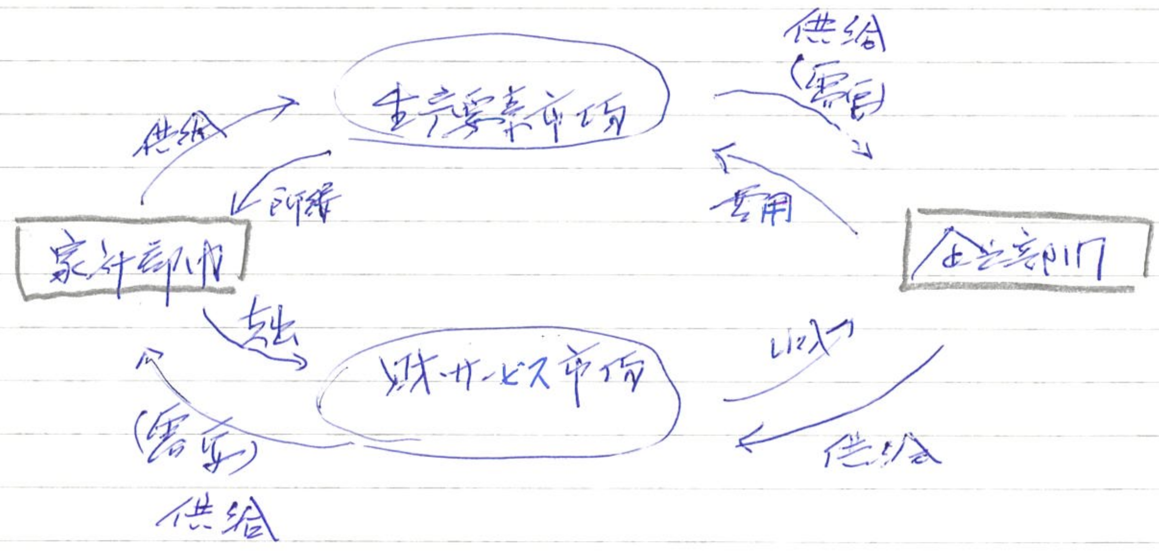
CD No. ⑥
Date /

1. 国民所得の概念

家計部門　消費者の集合　　　労働の供給主体
財・サービスの最終消費主体
消費されなかったものは貯蓄となる

企業部門　生産者の集合
財・サービスの供給主体

政府部門　財政当局　政府支出などによって、民間の経済活動を補完
金融当局　貨幣供給などの管理を通して金融政策



2. 国民総生産の概念

GDP ― 一国において一定期間に造り出された価値

付加価値　生産者が新たに付け加えた価値

国民総生産とは付加価値である。

国民総生産(GNP)	
国民純生産(NNP)	資本減耗
国民所得(NI)	間接税 − 補助金

間接税 … 税金
補助金 … マイナスの税金

企業は、この付加価値を上げることによって利益を得る。

3. 三面等価の原則

三面等価

(1) 生産 GDP

(2) 分配 = 雇用者所得 + 営業余剰 + 資本減耗 + 間接税 − 補助金 + 海外からの純要素所得(輸出−輸入)

(3) 国民総支出 = 民間最終消費支出 + 政府最終消費支出 + 国内総資本形成 + 在庫品増加 + 経常海外余剰(輸出−輸入)
(支出)

農家	製粉業者	パン屋	付加価値計
小麦生産	小麦粉	パン	
60万円	40万 cost 60万 100万	100万円 cost 100万円	200万円 → 消費

No.
Date 3

4. 消費関数

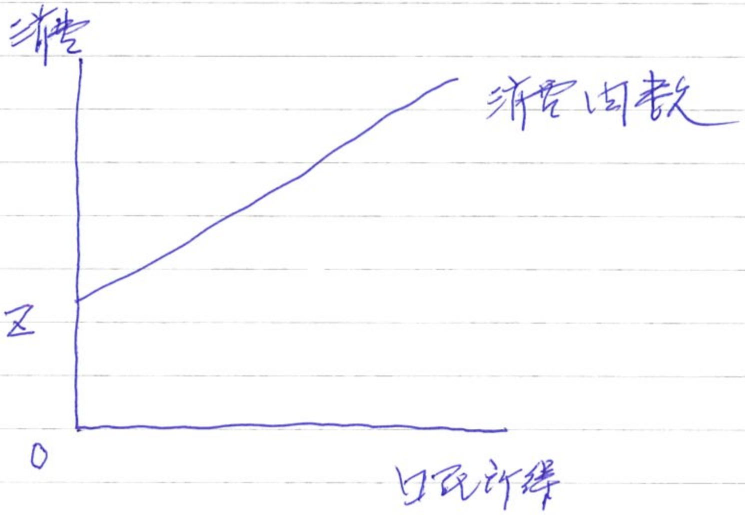
消費関数 $C(Y)$

平均消費性向 C/Y

限界消費性向 ΔC $\Delta C/\Delta Y$

消費関数 $C(Y) = cY + Z$

c 限界消費性向　Z 所得変化に依存しない消費（基礎消費）



5. 貯蓄関数

$$S(Y) = Y - C(Y)$$

Date 4

6. 投資関数

投資要因

・将来利益の期待

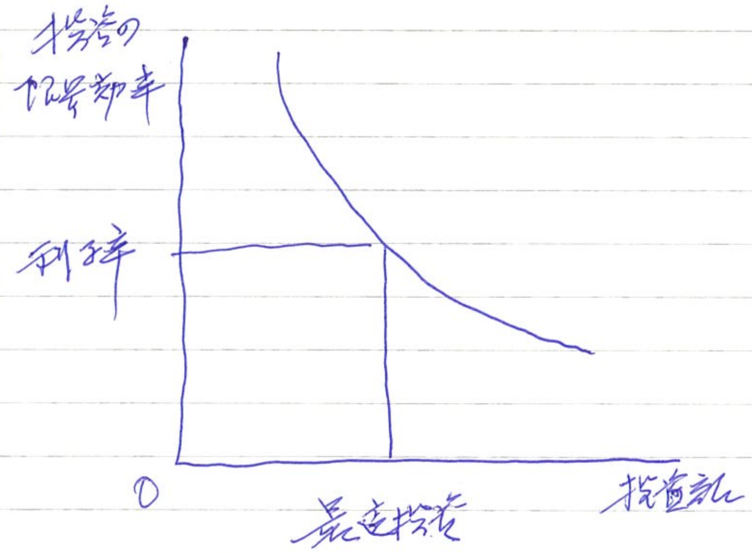
・利子率 ---- 投資資金の調達コスト

・企業の保有する経営資源

投資の限界性向（限界効率）

投資一単位を追加的に行うことによって得られる利益率

投資プロジェクトを限界効率の高い順に並べる



$I = I(r)$

投資を決定するためには、利子率と投資の限界効率を比較する。
利子率が与えられたときに、ある追加的な投資を行うかどうかは、そのときの限界効率が利子率よりも大きいか否かに依存する

追加的な投資の効率

リスク

＞ ストア・投資の時に考える

利子率、コスト

投資と時間 (生産関数

(1) 企業とは何か

利潤最大化を目的とする一つの経済主体である

(2) 企業は誰のものか

(3) 情報の非対称性

(4) 生産関数 F

$$Y = A \cdot F(L, K)$$

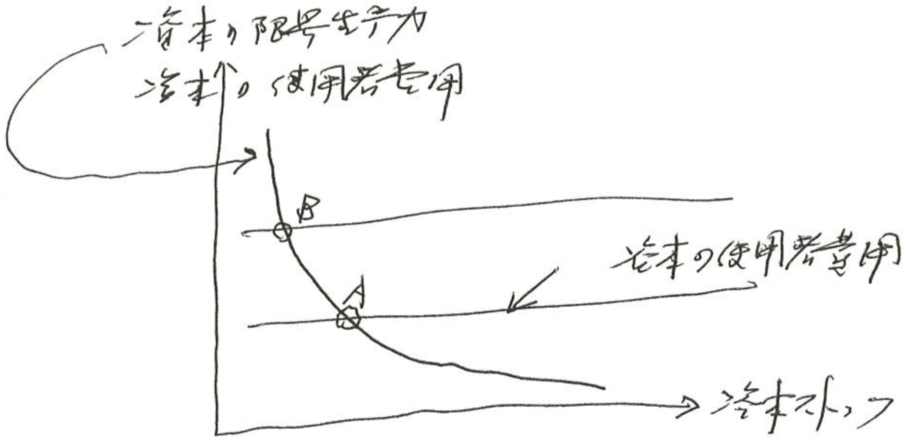
Y 生産量

L 労働力

K 資本ストック

F 生産関数

(5) 望ましい資本ストック



資本の限界生産力と資本の使用者費用の交点Aで決定される

CD ⑥ ~~経済学~~

① 経済全体と市場

竹田陽介先生「経済学」 2019.03.04

1. 経済全体の最適な行動

所与の制約条件 （1日24h、生涯賃金----）の下で

最小の費用によって

最大の効用（満足度）を得ること

家計 効用の最大化

企業 利潤最大化

政府 社会厚生の最大化

将来、長期の満足度

投資決定

↓

時間と効用（効率）

2. 時間という希少な資源

~~予算~~制約

3. 限界効用 --- 追加的な効用

限界効用逓減の法則

4. 制約条件

5. 家計の効用の最大化

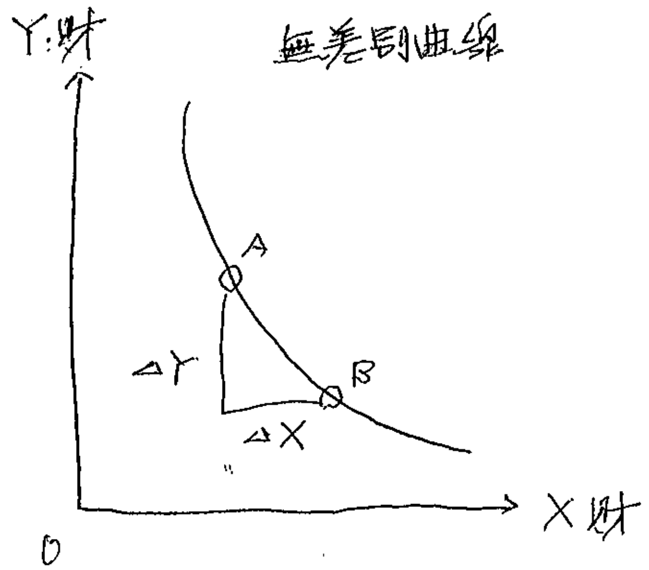
(1) 労働供給の決定

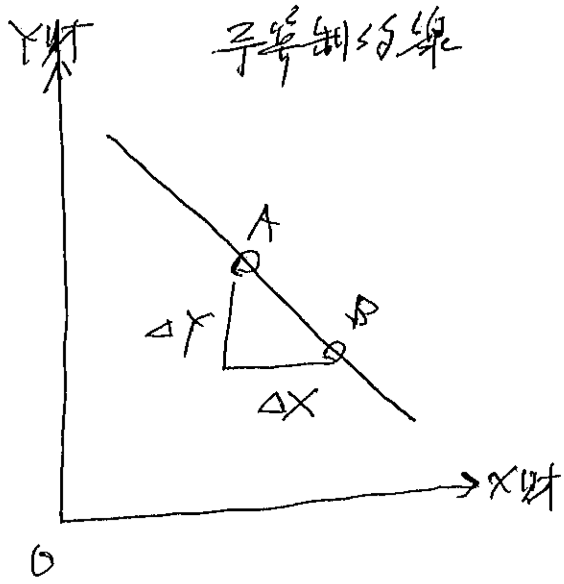
最適な余暇と労働時間との配分

子供は歴史的には投資財であった.

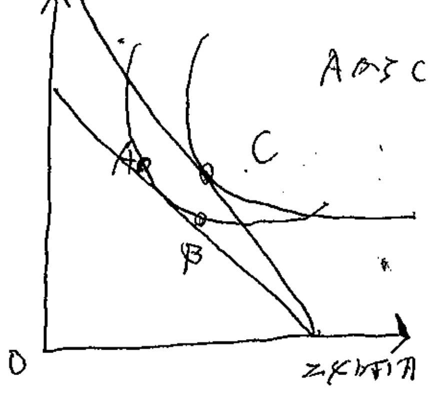
道楽息子の定理 rotten kid theorem

(2) 機会費用





(3) 代替効果と所得効果



BからCへの動き

AからCへの動き

6、消費と貯蓄の選択

家計の現在と将来における異時点の選択問題

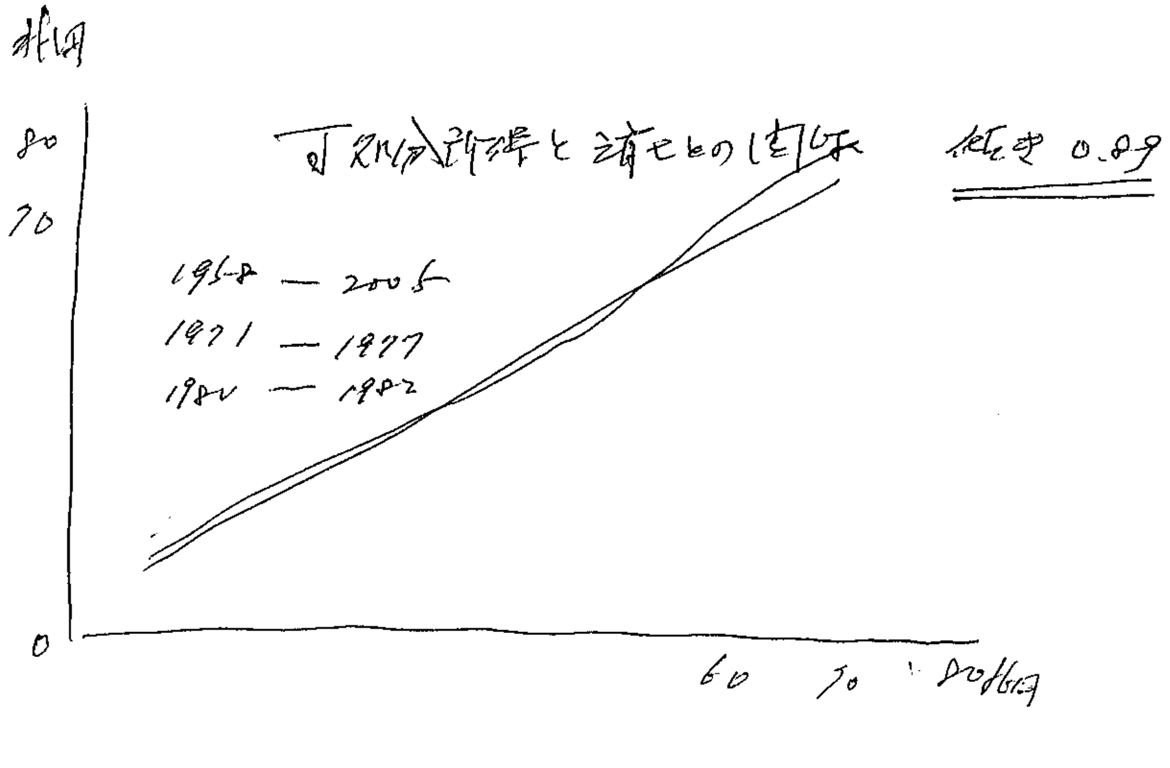
7、①ケインズ型消費関数と②恒常所得仮説

① 所得が上がったので消費を増やす

$$C = Z + cY_d$$

② 将来の所得の減少を考え消費は増やさない

③ ライフサイクル仮説
老後を考えて貯蓄する



8、企業の利潤最大化

(1) 生産関数

限界生産力

投入量(コスト)を 最大の利潤(生産量)と結

(2) 利潤の最大化

最小のコスト(投入量)で、 最大の利潤(生産量)を得ること

(3) 限界生産力

投入量を限界的に1単位増加させたときに

生じる生産量の限界的な増加分 (marginal product)

(4) 労働の限界生産力

労働者間で大きな差が出る。

労働の熟練、機械化 …… (時間の節約)

利潤の高い企業 ① 労働分配率の低い企業

② 作業、業務の改善に成功した企業

③ 情報技術の利用がうまい企業

④ 技術をうまく利用できる企業

利益、利潤とは、同じ量を生み出すのに必要な労働の節約

つまり、人件費の削減、節約

投資と時間 (生産関数

(1) 企業とは何か

利潤最大化を目的とする一つの経済主体である

(2) 企業は誰のものか

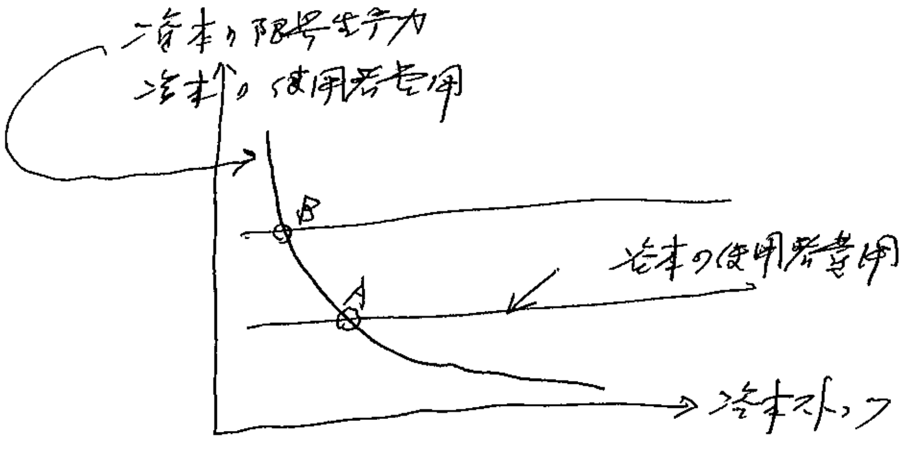
(3) 情報の非対称性

(4) 生産関数 F

$$Y = A \cdot F(L, K)$$

Y 生産量
L 労働力
K 資本ストック
F 生産関数

(5) 望ましい資本ストック



資本の限界生産力と資本の使用者費用の交点Aで決定される

2019.06.03
2019.04.15
2019.02.12
2018.09.18
2018.07.16
2018.05.14
2018.03.19
2018.01.15

積　分　の　定　石

（変化する量を集めて形にする）

会計と経営のブラッシュアップ
平成 29 年 9 月 25 日
山内公認会計士事務所

次の図書等を参考にさせていただきました。（微分と積分なるほどゼミナール　S58.1 岡部恒治著　日本実業出版社刊）（微積分のはなし　1985.3 大村平著　日科技連刊）（Excel で学ぶ微分積分 H24.8 山本将史著オーム社）（イラスト図解微分・積分　2009.6 深川和久著　日東書院刊）（微積分を知らずに経営を語るな PHP選書）内山力著（Excel でやさしく学ぶ微分積分　室　淳子著 2006 東京図書）

Ⅰ　身近な積分

1．積分の歴史

⑴ 古代エジプトで積分の基礎が築かれた。（どうやって全体の面積を把握するか）

↓

ギリシャのアルキメデスが更に発展

↓

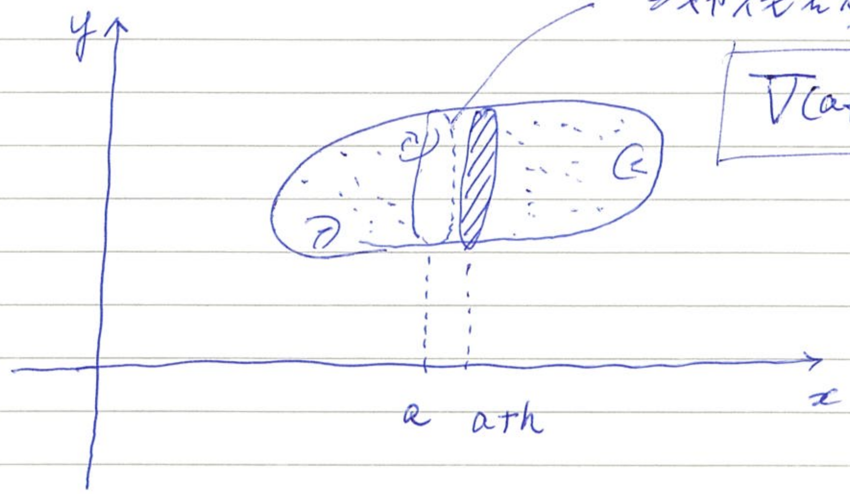
17C のニュートンとライプニッツが微分・積分を発明

社会科学
自然科学 → グラフに描く → 機何学の問題になる

積分→結果どうなったか、小さな変化をどのように形とするか
小さなものから大きな形を得る、小さな変化を積み重ねるとどうなったかとその結果
曲線で囲まれた土地の面積を直線化して調べる
小さな変化は大きくなるとどんな形になったか
変化する様子、変化する量をどうやって集めるか
∫ →インテグラルが付くと積分することを表す（　〃　）

次のような技術は、すべて微分・積分がなければ発展しなかった。
コンピュータ、通信、光学機械、テレビ、ラジオ、CD、車、鉄道、飛行機、建築、経済学、物理学、化学、工学、農学…

6、ジャガイモの体積



(ポテトチップ)
ジャガイモをスライスした部分の体積

$$\boxed{V(a+h) - V(a) \fallingdotseq h \times S(a)}$$

$S(a)$ = ジャガイモの断面積

ポテトチップの厚み

hを十分小さくすれば その体積Vはほぼ $h \times S(a)$ となる。

$V(a+h) - V(a) = h \times S(a)$ となり、

hで両辺を割り、hを限りなく0に近づけると

$$\lim_{h \to 0} \frac{V(a+h) - V(a)}{h} \fallingdotseq \frac{h \times S(a)}{h} = S(a)$$

↑ ((ジャガイモの体積を微分するとジャガイモのスライス(ポテトチップ)の面積になる。))

((逆に、立体の断面積を積分すれば、その立体の体積が求められる。))

$$V(x) = \int_b^a S(x)\,dx$$

2. 地球の体積

ギリシャの天文学者 エラトステネス (B.C. 278〜B.C. 192)

シエネの正午の井戸に反射した太陽 (太陽の影の角度 0°)

同時刻にアレクサンドリアで映った太陽 (太陽の影の角度 ○°)

] 800キロの距離 7度12分の差

地球の円周の長さを x とすると

$$\frac{7°12'}{360°} = \frac{800\,km}{x}$$

$x \fallingdotseq 40{,}500\,km$ 地球の円周

円周÷2π ≒ 6,370km 地球の半径 $2\pi r = 40{,}500$ $r \fallingdotseq 6{,}370$

$\frac{4}{3}\pi r^3 = 1.08 \times 10^{12}\,km^3$ 地球の体積

5. 定積分

一定の範囲の全体量を求める。

$f(x) = ax$の不定積分で

$$F(t) = \frac{1}{2}at^2 + c$$

$$F(t+1) = \frac{1}{2}at^2 + at + \frac{1}{2}a + c$$

の差を求めると、

$$F(t+1) - F(t) = at + \frac{1}{2}a \quad \text{(定積分)}$$

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x) + c]_a^b = F(b) - F(a)$$

と書き、aからbまでの範囲(積分区間)で一定の全体量が求められる。

即ち、aからbの範囲で積分する。

例えば、$y=\frac{1}{2}x$について、積分区間を$1≦x≦3$として積分すると、

$$\int_1^3 xdx = [\frac{1}{2}x^2]_1^3 = \frac{1}{2} \times (3)^2 - \frac{1}{2} \times (1)^2 = \frac{9-1}{2} = 4 \text{ となる}$$

これは、底辺が3の正三角形と底辺が1の正三角形の面積の差$(3×3÷2)-(1×1÷2)=4$となる、同じことであることがわかる。

$y = x^2$を、$1 ≦ x ≦ 3$で積分すると、

$$\int_1^3 x^2dx = [1/3x^3]_1^3 = 1/3 \times (3)^3 - 1/3 \times (1)^3 = 27/3 - 1/3 = \frac{26}{3}$$

細かく区切って、似たような面積を足しても、近い面積しか得られないのに対し、関数で表わすことができれば、計算で、簡単に正確な面積が求められる。

Ⅲ、面積と体積を求める F

1、関数に囲まれた面積

(1) ①と②に囲まれた面積Sは、

$f(x)=x^2$ —①　　$g(x)=-x^2+2x+4$ —②

②を微分すると $g'(x)=-2x+2$　　$f(x)$の頂点は $f'(x)=2x$, $x=0$, $(0,0)$

頂点は、$g'(x)=0$ とおいて、$0=-2x+2$、$x=1$ である。

そこで、$g(x)$に $x=1$ を代入して $g(1)=-1+2+4=5$ で

$g(x)$の頂点は $(1,5)$ となる。

グラフ①と②の交点は、$f(x)=g(x)$ を解くと、

$x^2=-x^2+2x+4 \longrightarrow 2x^2-2x-4=2(x^2-x-2)=2(x+1)(x-2)=0$

よって、①と②は -1, 2 で交わる

すなわち、x方向は、$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲となる

y方向(タテ)の長さを $h(x)$とすると、

グラフより、$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で $f(x) \leqq g(x)$ なので

$h(x)=g(x)-f(x)=-x^2+2x+4-x^2=-2x^2+2x+4$

すなわち、y方向(タテ)の高さは、$-2x^2+2x+4$ となる。

これを定積分すると、

xの範囲(ヨコ)とyの方向の高さ(タテ)の関数がわかったので

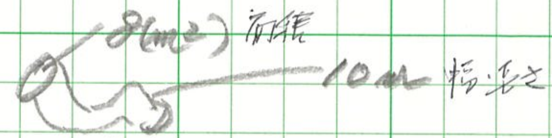
$$S=\int_{-1}^{2} h(x)\,dx=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(-\frac{2\times 2^3}{3}+2^2+4\times 2\right)-\left(\frac{-2\times(-1)^3}{3}+(-1)^2+(4\times -1)\right)$$

$$=\left(-\frac{16}{3}+4+8\right)-\left(\frac{2}{3}+1-4\right)=9$$

2. 関数に囲まれた体積

積分は面積を求めるばかりでは無く、
かけ算をして意味がある全体量ならば、
xの範囲がわかって、yが関数で表わされれば、定積分が使える。



(1) 例えば、曲がってはいるが、どこを切っても~~断面積が 8~~ になる m²
長さ 10 の管の体積 V_1 は、 m 高さ・面積
長さの方向を x方向とし、断面積を積み重ねて体積を求めると、

$$V_1 = \int_0^{10} 8\,dx = \Big[\,8x\,\Big]_0^{10} = 80\ (m^3)$$

$$8(1)^{10} \times 10 = 80\ m^3$$

m² m

面積 長さ・幅

(2) 次に、形はわからない物体の体積 V_2 は、

方向の長さが 5 で、断面積 S は $3x^2+10$ とすると、

$$V_2 = \int_0^5 (3x^2+10)\,dx = \Big[\,x^3+10x\,\Big]_0^5 = 175$$

幅・長さ

$$(3x^2+10)\ m^2 \times dx\ m$$

面積・高さ y

$$\frac{3}{3}x^3+10x = (5)^3+10(5) = 175\ m^3$$

3、積分のまとめ

面積、体積を表す

作成日 . .
作成者

不定積分

$\int f(x)dx$ というような記号で 関数 $f(x)$ を（高さ）x で積分することを表す。

dx は、限りなく小さな幅 x、（幅）

不定積分の名の通り、全体量を定まらないが、その傾向を関数として得ることができるので、分析などに利用できる

$$\int x^n dx = F(x) + c = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$$

高さ、面積 × 幅

（c は積分定数）

$f(x)$ を積分した原始関数を $F(x)$ で表わす。

定積分

定積分は、積分区間を定めて行う。

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)+c\Big]_a^b = (F(b)+c) - (F(a)+c)$$

$$= F(b) - F(a)$$

$f(x)$ 高さ　長さ dx

この全体量は、関数と x 軸に囲まれた面積に相当する。

定積分は、x の積分区間と y の関数が定まれば、曲線で囲まれた面積も体積も簡単に計算できる。

高さ又は面積 × 幅 dx

面積又は体積 × 幅 dx

F

'26

作成日 . .
作成者

5. 計算例

x^{-2}

(1) $y = 10x^4 - 2x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ を積分する

$$\int y\,dx = \int \left(10x^4 - 2x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \frac{10}{4+1}x^{4+1} - \frac{2}{2+1}x^{2+1} + \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + C$$

$$= 2x^5 - \frac{2}{3}x^3 - x^{-1} + C = 2x^5 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{x} + C$$

(2) $y = 2x^3 + x - \sqrt{x}$ を積分する

$\dfrac{2}{1.5}x^{1.5}$

$$\int f(2x^3 + x - \sqrt{x})\,dx = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

(3) $y = x^4 + 3x^2 - 10x$ を 1から2の範囲で積分する

$$\int_1^2 f(x^4 + 3x^2 - 10x)\,dx = \frac{1}{5}x^5 + x^3 - \frac{10}{2}x^2$$

$$= \frac{1}{5}(2)^5 + (2)^3 - 10(2) - \left(\frac{1}{5}(1)^5 + (1)^3 - 10\right) = \frac{16}{5}$$

(4) $y = 2x^3 - 3x^2 - \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ を1から2の範囲で積分する

$$\int_1^2 f\left(2x^3 - 3x^2 - \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - x^3 - 6x^{\frac{1}{2}}\right]_1^2$$

$$= \left(8 - 8 - 6\sqrt{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - 1 - 6\right) = \frac{13}{2} - 6\sqrt{2}$$

T

作成日 . 27 .
作成者

(5) 関数 $f(x)$の式とグラフを求める

$f(x)$は $(1, -2)$ を通り、$f'(x) = 4x - 8$ となるとする。

関数 $f'(x)$ を積分すると

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (4x-8)dx$$

$$= \frac{4}{2}x^2 - 8x + C = 2x^2 - 8x + C$$

Cを求める

$f(x)$は $(1, -2)$ を通るので

$$f(1) = 2 \times 1^2 - 8 \times 1 + C = -2$$

$$\longrightarrow 2 - 8 + C = -2 \longrightarrow C = 4$$

よって、$f(x) = 2x^2 - 8x + 4$

$f(x)$の頂点を求めると、

$$f'(x) = 4x - 8 = 0 \longrightarrow x = 2$$

$$f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 4 = -4$$

よって、$f(x)$の頂点は $(2, 4)$、また x^2の係数はプラスなので下に凸のグラフとなる

(6) (5)において $f(x)$と x軸に囲まれた面積を求める

$f(x)$と x軸の交点は、 $0 = 2x^2 - 8x + 4 \longrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ より $x = \frac{-1 \times (-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$

面積を求めると、グラフより、$2-\sqrt{2} \leqq x \leqq 2+\sqrt{2}$ において $f(x) \leqq 0$ なので、

$$\int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}} -f(x)dx = \int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}} -(2x^2 - 8x + 4)dx = -2 \times \int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}} ((x-2)-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})dx$$

$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ より $-2\left(\frac{1}{6}\right) \times (2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2})^3 = \frac{2}{6}(2\sqrt{2})^3 = \frac{16}{3}\sqrt{2}$

実例練習

1.　2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$

$$f(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{16}{3} \qquad g(x) = -2x^2 - 2x$$

((1)) 2つの関数のグラフを描く

((2)) $x \geqq 0$ の範囲で、$f(x)$、$g(x)$、x軸に囲まれる面積Sを求める。

(解)

(1) $f(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{16}{3}$ を微分して頂点を求める

① $f'(x) = \frac{2\times4}{3}x = \frac{8}{3}x$, $\frac{8}{3}x = 0 \rightarrow x = 0$

② $f(0) = -\frac{16}{3}$

よって、$f(x)$の頂点は、$(0, -\frac{16}{3})$であり、

$f(x)$のx^2の係数はプラスなので、下に凸

(2) $g(x) = -2x^2 - 2x$ を微分して頂点を求める

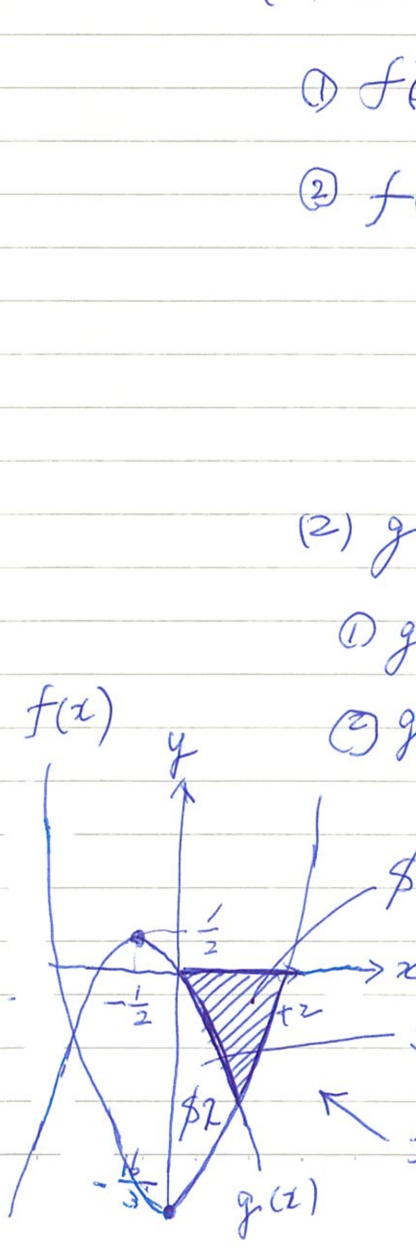
① $g'(x) = -2\times2x = -4x+2$, $-4x+2=0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$

② $g(-\frac{1}{2}) = -2(-\frac{1}{2})^2 - 2(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$

よって、$g(x)$の頂点は $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

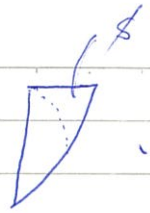
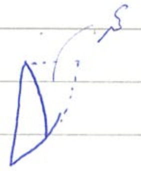
$g(x)$のx^2の係数はプラスなので、上に凸

また、$g(x)$は定数がないので、$(0,0)$を通る



S1 (Sを含む)

$x \geqq 0$で、$f(x)$と$g(x)$とx軸に囲まれている

((2)) 面積 S は  、S_1 は  、S_2 は 

$$S = S_1 - S_2$$

① S_1 は $f(x)$ の x 軸との交点を求めると

$$0 = \frac{4}{3}x^2 - \frac{16}{3} \iff 0 = x^2 - 4$$

$$\longrightarrow 0 = (x-2),\ (x+2)$$

よって、$f(x)$ は $x = \pm 2$ で x 軸と交わる

$$S_1 = \int_0^2 -f(x)\,dx = -\int_0^2 \left(\frac{4}{3}x^2 - \frac{16}{3}\right)dx$$

$$= -\left[\frac{4}{3\times 3}x^3 - \frac{16}{3}x\right]_0^2 = -\frac{4}{9}\times 2^3 - \frac{16}{3}\times 2 + 0$$

$$= -\frac{32}{9} + \frac{32}{3} = \underline{\underline{\frac{64}{9}}}$$

② S_2 は、$f(x)$, $g(x)$ の交点を求める

$$\frac{4}{3}x^2 - \frac{16}{3} = -2x^2 - 2x \longrightarrow 6x^2 + 4x^2 + 6x - 16 = 0$$

$\left(x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ より} \right)$ $\quad x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\times 5\times(-8)}}{2\times 5} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{169}}{10} = \dfrac{-3+13}{10} = -\dfrac{8}{5}, 1$

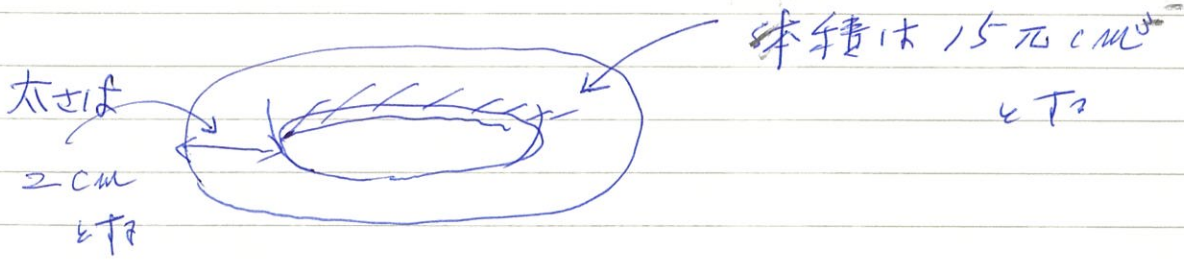
グラフより $0 < x < 1$ において $f(x) < g(x)$ なので

$$S_2 = \int_0^1 \{g(x) - f(x)\}dx = \int_0^1 \left(-2x^2 - 2x - \frac{4}{3}x^2 + \frac{16}{3}\right)dx = \int_0^1 \left(-\frac{10}{3}x^2 - 2x + \frac{16}{3}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{10}{9}x^3 - x^2 + \frac{16}{3}x\right]_0^1 = -\frac{10}{9}\times 1^3 - 1^2 + \frac{16}{3}\times 1 - 0 = -\frac{10}{9} - 1 + \frac{16}{3} = \underline{\underline{\frac{29}{9}}}$$

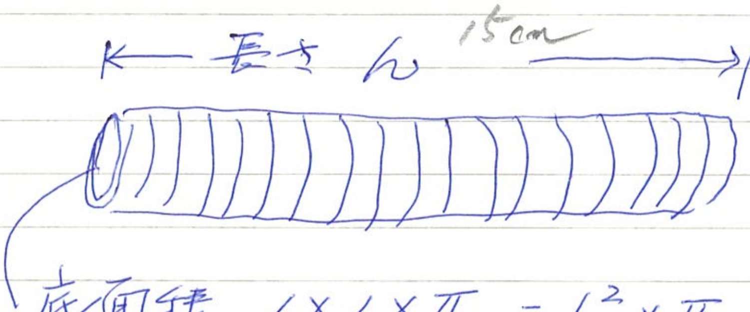
$S = S_1 - S_2$ より $\quad S = \dfrac{64}{9} - \dfrac{29}{9} = \dfrac{35}{9}$

4. ドーナツの表面積



① 4等分にしてつなげる

② さらに細かく切ってつなげると ⟶ 円柱になる



$15 \times \pi\ cm^2 = 15\pi\ cm^2$
cm

底面積　$1 \times 1 \times \pi = 1^2 \times \pi = \pi$、円周は $2\pi \times 1$

体積　$\pi h = 15\pi\ cm^3$ より、高さは $h = 15$

円周は 2π

よって、ドーナツの表面積（円柱の側面積）は、

$15 \times 2\pi = 30\pi\ cm^2$

8. ある関数を積分してできた関数を微分すると、
元の関数に戻る

$f(t)$ 速度

$F(t)$ 位置

$F(t)$を微分するということは、$F(t)$の曲線に t において
引いた接線の傾きを求めることである。

その傾きは、$\dfrac{\Delta F(t)}{\Delta t}$

$\dfrac{dF(t)}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta F(t)}{\Delta t}$ となり、$\dfrac{dF(t)}{dt} = f(t)$ となる。

すなわち、$f(t)$において面積（積分）をとると、$F(t)$、
$F(t)$の傾き（微分）をとると、$f(t)$となる

9. 位置と速度の関係.

10、加速度

① y（位置）を x（時間）で微分すると y（速度）になる

$$y = x^2 + x$$

（y 位置　，　x 時間）

② この y（速度）を更に、x（時間）で微分すると

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 1$$

$\frac{dy}{dx}$ は速度を表わしており、加速度？

2019.06.05 ⑥
2018.10.09
2017.08.28
2017.05.29

孫子 曹操註釈

魏武帝註

序　操聞、上古有利弧矢。論語曰足兵.

尚書八政曰，師也。 易曰、師貞丈人吉也。

詩曰、王赫斯怒、其旅劉之。

黄帝湯武，咸用干戚，以救世。

司馬法曰、人故殺人、殺之可也。恃武就滅、

恃文就亡。 恃武者滅，恃文者亡

夫差・偃王是也。 聖人用兵，戢而時動、

已不得而用之。

吾見多兵書戦策，孫武著深矣。

審計而重（審計重挙）、明画深図、不可相誣。

而、世人未之深亮、況文煩富、行世者，失其旨要。

故撰為略解

昔から残っている言葉には、一筋の矢が将軍の命を

簡単に奪ってしまうかのような銘がある。

論語には兵が足ると書かれている（日常に日常として成立すること）

歴史上の名君は、武器を手にとり世を救ってきた。

始计一　计者、选将量敌，度地料卒，计於庙堂也。

作战二　欲战者，必先算费，务粮因敌，

谋攻三　欲攻敌，必先谋。

举师深入长驱、拒其都邑、绝其内外
敌举国来服为上，以兵击破，得之为次也。
未战而敌自屈服。

军形四　先ず守り　敵が勝てないようにする
次いで攻め　敵に勝てるようにして斗う
勝は涼し

兵势五　分数　多くの人を治めること少しの人を治めるようにすること
形名　多くの人を斗わせること、あたかも少しの人を斗わせるようにすること
奇正　正者当敌、奇者従旁、击不备也
虚実　充実した状態で、相手の虚をつくこと

虚実六　虚　敵の意外とするところ
実　こちらの充実しているところ

軍争七　不知敌情者　不能结交

兵、一合一分、以敌为变

九変八　在利思害　在害思利

行軍九　用兵常处之害，令敌近背之，则我利敌凶

地形十　恩不可専用、罰不可独任

九地十一　士卒志士、道近易散

禁妖祥之言、去疑惑之计

人情、见利进、遇害而退

後人发　先人至

火攻 十二　見可而進、知難而退

不以己之喜怒用兵

用間 十三　不可祷祀而求

不可以事類求

不可以事数度

因間人也

1. 戦争は、他にどうしようもないからやること //

2. 戦争とは常ではない特別のこと

3. 兵は詭道なりとは、戦争のときのみに使うことば

↓

戦争とは特別の場合であり、孫子は特別な場合に役立つ書物、

数々の英雄たちのことを知るため孫子を読む

No. 2016.10.24

Date

孙子

第一计

孙子曰：兵者，国之大事也。死生之地，存亡之道，不可不察也。

故，经之以五，校之以计而索其情：一曰道，二曰天，三曰地，四曰将，五曰法。

道者，令民与上同意也。故可与之死，可与之生，而不诡也。天者，阴阳、寒暑、时制也。地者，高下、远近、险易、广狭、死生也。将者，智、信、仁、勇、严也。法者，曲制、官道、主用也。凡此五者，将莫不闻，知之者胜，不知者不胜。故，校之计，而索其情。曰：主孰贤？赏罚孰明？吾以此知胜负矣。

将听吾计，用之必胜，留之；将不听吾计，用之必败，去之。计利以听，乃为之势，以佐其外，用示之不用，近而示之远，远而示之近。利而诱之，乱而取之，实而备之，强而避之，怒而挠之，卑而骄之，佚而劳之，亲而离之。攻其无备，出其不意。此兵家之胜，不可先传也。

夫、未战而庙算胜者，得算多也；未战而庙算不胜者，得算少也。多算胜，少算不胜，而况于无算乎？吾以此观之，胜负见矣。

PLUS

第二 作战

孙子曰：凡、用兵之法，驰车千驷，革车千乘，带甲十万，千里馈粮；则、内外之费，宾客之用，胶漆之材，车甲之奉，日费千金，然后十万之师举矣。

其、用战也，胜久则钝兵挫锐，攻城则力屈，久暴师则国用不足。夫、钝兵挫锐，屈力殚货，则、诸侯乘其弊而起，虽有智者，不能善其后矣。故、兵闻拙速，未睹巧之久也。夫兵久而国利者，未之有也。故不尽知用兵之害者，则、不能尽知用兵之利也。

善用兵者，役不再籍，粮不三载，取用于国，因粮于敌，故、军食可足也。

第四 军形

孙子曰：昔之善战者，先为不可胜，以待敌之可胜：不可胜在己，可胜在敌。故善战者，能为不可胜，不能使敌必可胜。故曰：胜可知，而不可为。

见胜不过众人之所知，非善之善者也，
战胜而天下曰善，非善之善者也。
故举秋毫不为多力，见日月不为明目，闻雷霆不为聪耳。

5

原文

第五 兵势

形—静的状形（態勢） 军队的形成
势（全体的な軍の動き） 旗やのぼり
指挥、斗

孙子曰：凡治众如治寡，分数是也；斗众如斗寡，形名是也；三军之众，可使毕受敌而无败者，奇正是也。兵之所加，如以碫投卵者，虚实是也。

四时 日月

凡战者，以正合，以奇胜。故善出奇者，无穷如天地，不竭如江河。终而复始，日月是也。死而复生，四时是也。声不过五，五声之变，不可胜听也。色不过五，五色之变，不可胜观也。味不过五，五味之变，不可胜尝也。战势不过奇正，奇正之变，不可胜穷也。奇正相生，如环之无端，孰能穷之？

激水之疾，至于漂石者，势也；鸷鸟之击，至于毁折者，节也。是故善战者，其势险，其节短。势如彍弩，节如发机。

纷纷纭纭，斗乱而不可乱也；浑浑沌沌，形圆而不可败也。乱生于治，怯生于勇，弱生于强。治乱，数也；勇怯，势也；强弱，形也。故善动敌者：形之，敌必从之；予之，敌必取之。以此动之，以卒待之。

敌 敌 敌 敌

故善战者，求之于势，不责于人，故能择人而任势。任势者，其战人也，如转木石；木石之性：安则静，危则动，方则止，圆则行。故善战人之势，如转圆石于千仞之山者，势也。

之＝代词 敌 之＝的

调动 diàodòng 变动、调是 乱 luàn 端 duān 转动 duàndòng

多寡 duōguǎ 打仗 斗争 分数 军队的组织 竭 jié 不断 疾风

奇袭 qíxí 官渡之战 形看得见 势 动的、看不见

形＝旗 名＝金、鼓 鼓作气 鸣金收兵 烽火（狼火）粪 节 速度

循环 xúnhuán 端 duān 予 yǔ＝给 疾 jí 形名＝命令 的

弩弓 nǔgōng 碫 duàn 石头 毁折 huǐ zhé 竭 jié 穷 qióng 怯 qiè

鸷 zhì 猛禽 měng qín 分数 组织 相生 互相转化 如 rú 斗 dòu 指挥

治 管理 扩弩 kuò nǔ 虚实＝实（充实）を以て虚（空虚）を打つ

浑浑沌沌 不分明 扩大 kuò dà 奇正 奇策と正攻

纷纷纭纭 繁多而杂乱 危险 激流 jī liú 黄帝の兵法 5

变 变化 彍 duàn

三军 正旗、湘旗、黄旗 仞 rèn 184cm 千仞溪谷

正正正正正正正正正正

充分な準備　相手の不備

原文　対穴　実によって虚を打つ　虚実

6

孙子曰：凡先处战地而待敌者佚，后处战地而趋战者劳。故善战者，致人而不致于人。

能使敌人自至者，利之也；能使敌人不得至者，害之也。故敌佚能劳之、饱能饥之、安能动之者，出其所必趋也。行千里而不劳者，行于无人之地也；攻而必取者，攻其所不守也；守而必固者，守其所必攻也。不（当然の逆になる）

故善攻者，敌不知其所守；善守者，敌不知其所攻。微乎微乎，至于无形；神乎神乎，至于无声，故能为敌之司命。进而不可御者，冲其虚也；退而不可追者，速而不可及也。故我欲战，敌虽高垒深沟，不得不与我战者，攻其所必救也；我不欲战，画地而守之，敌不得与我战者，乖其所之也。

故形人而我无形，则我专而敌分；我专为一，敌分为十，是以十攻其一也，则我众而敌寡。能以众击寡者，则吾之所与战者，约矣。吾所与战之地不可知，不可知，则敌所备者多，敌所备者多，则吾所与战者寡矣。故备前则后寡，备后则前寡，备左则右寡，备右则左寡；无所不备，则无所不寡。寡者，备人者也；众者，使人备己者也。

故知战之地，知战之日，则可千里而战。不知战地，不知战日，则左不能救右，右不能救左，前不能救后，后不能救前，而况远者数十里，近者数里乎？以吾度之，越人之兵虽多，亦奚益于胜哉？故曰：胜可为也。敌虽众，可使无斗。

故策之而知得失之计，作之而知动静之理，形之而知死生之地，角之而知有余不足之处。故形兵之极，至于无形；无形，则深间不能窥，智者不能谋。因形而措胜于众，众不能知；人皆知我所胜之形，而莫知吾所以制胜之形。故其战胜不复，而应形于无穷。

夫兵形像水，水之行，避高而趋下；兵之胜，避实而击虚。水因地而制行，兵因敌而制胜。故兵无成势，无恒形。能因敌变化而取胜~~者~~，谓之神。

故五行无常胜，四时无常位，日有短长，月有死生。

舍shě 舍去
措 cuò
窥视 kuī shì

佚yì 饥jī 致zhì 动是す 调动 欲yù 垒lěi 乖guāi 己jǐ 奚xī いずくんぞ 6

饱满bǎomǎn 乎hū 啊 无wú 守shǒu 则 那么 专集中 分分开 皆jiē

正正正正正正正正正下

模 侦探 zhēntàn 奸细 jiānxì

舍 shè とどまる
俟 shì 期待する
逮 huán
间谍 jiàn dié

原文

用间 第十三

孙子曰：凡兴师十万，出征千里，百姓之费，公家之奉，日费千金，内外骚动，怠于道路，不得操事者，七十万家。相守数年，以争一日之胜，而爱爵禄百金，不知敌之情者，不仁之至也，非民之将也，非主之佐也，非胜之主也。故明君贤将，所以动而胜人，成功出于众者，先知也。先知者，不可取于鬼神，不可象于事，不可验于度，必取于人，知敌之情者也。

俱 jù 一起

故用间有五：有乡间，有内间，有反间，有死间，有生间。五间俱起，莫知其道，是谓神纪，人君之宝也。乡间者，因其乡人而用之。内间者，因其官人而用之。反间者，因其敌间而用之。死间者，为诳事于外，令吾间知之，而传于敌间也。生间者，反报也。

故三军之亲，莫亲于间，赏莫厚于间，事莫密于间。非圣不能用间，非仁不能使间，非微妙不能得间之实。微哉！微哉！无所不用间也。间事未发，而先闻者，间与所告者皆死。

凡军之所欲击，城之所欲攻，人之所欲杀，必先知其守将、左右、谒者、门者、舍人之姓名，令吾间必索知之。

诳 kuáng 欺す

必索敌人之间来间我者，因而利之，导而舍之，故反间可得而用也。因是而知之，故乡间、内间可得而使也；因是而知之，故死间为诳事，可使告敌；因是而知之，故生间可使如期。五间之事，主必知之。知之必在于反间，故反间不可不厚也。

谒 yè おめにかかる 来訪者

昔殷之兴也，伊挚在夏；周之兴也，吕牙在殷。故惟明君贤将，能以上智为间者，必成大功。此兵之要，三军之所恃而动也。

伊 yī 人名 挚 zhì 诚实的 吕 lǚ 渡茶

莫 mò 不要 若 ruò

怠 dài 怠惰 dài duò

此 cǐ 彼 bǐ 夫 fú 谒 yè 骚动 sāo dòng

佐 zuǒ 算 suàn 索 suǒ 寻求 辅佐 fǔzuǒ

竭 jié 伐 fá 拔 bá 殷朝 yīn cháo

隙 xì 辅 fǔ 欲 yù 虞 yú 爵 jué

御 yù 干涉

正

贤人 xián rén 贤人